Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Piotra Polaka pt.
„Ocena asymptotyki rozwiązań układów z opóźnieniem typu neutralnego"

Rozprawa, napisana pod kierunkiem profesora dr habilitowanego Grigorija Sklyara, liczy ponad 70 stron i składa się z 5 rozdziałów, nie licząc przedmowy i dodatku. Głównym jej przedmiotem jest analiza układów z tzw. rozłożonym opóźnieniem typu neutralnego. Oznacza to klasę układów opisywanych liniowymi układami równań różniczkowych zwyczajnych w przestrzeni skończonego wymiaru, gdzie w równaniu pochodna zmiennej stanu pojawia się nie tylko w danym momencie czasu ale także na całym poprzedzającym odcinku czasu ustalonej długości. Takie równania mogą pojawiać się w zastosowaniach przy modelowaniu realnych układów. Autor stosuje teorię półgrup operatorów w przestrzeni Hilberta jako główną technikę w analizie takich układów. Główne wyniki przedstawione w rozprawie zostały opublikowane w dwu pracach autorstwa G. Sklyara i P. Polaka w czasopiśmie „Applied Mathematics and Optimization", które ukazały się odpowiednio w roku 2013 i 2016. Zastosowane techniki pochodzą w dużej mierze z prac opublikowanych przez promotora rozprawy i jego współautorów w latach 2003-2010 a także z wcześniejszych prac innych badaczy.

Po krótkiej przedmowie rozprawa rozpoczyna się dobrze napisanym wprowadzeniem (Rozdział 2), gdzie przedstawiony jest materiał potrzebny w dalszych częściach. Korzystając z istniejących monografii Autor definiuje potrzebne pojęcia z zakresu teorii półgrup operatorów, przede wszystkim te, które są przydatne do analizy półgrup zdefiniowanych przez układy z opóźnieniem badane w rozprawie. Wprowadza też rozwinięte wcześniej techniki, w tym wspólne resultaty G. Sklyara, R. Rabaha i A.V. Rezounenko.

W Rozdziale 3 badane jest zachowanie C_0-półgrup operatorów w zespolonej przestrzeni Hilberta o generatorze spełniającym specjalne założenia. Polegają one na ograniczeniu się do generatorów z punktowym spektrum podzielonym na przeliczalną ilość grup, wzajemnie odseparowanych wspólną stałą dodatnią, z których każdej odpowiada podprzestrzeń niezmiennicza o skończonym, wspólnie ograniczonym wymiarze i stanowiących tzw. bazę Riesza podprzestrzeni. Przy tych założeniach dowodzi się twierdzenia technicznego (Tw. 3.6) oraz głównego w tym rozdziale Twierdzenia 3.8 o tzw. wielomianowej stabilności półgrupy. Dość techniczne w sformułowaniu pojęcie takiej stabilności zostało wprowadzone w roku 2006. Oznacza z grubsza, że półgrupa zbiega przy rosnącym czasie do zera z wielomianową szybkością, jednostajnie na pewnej klasie stanów początkowych. Dowód tych twierdzeń wymagał dość kłopotliwych oszacowań normy generatora na jego skończenie wymiarowych podprzestrzeniach własnych.

Główne i moim zdaniem najważniejsze wyniki rozprawy są sformułowane i udowodnione w Rozdziale 4. Rozważa się tu układ równań z opóźnieniem typu neutralnego postaci

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + \int_{-1}^{0} A_2(s)\dot{z}(t+s)ds + \int_{-1}^{0} A_3(s)z(t+s)ds,$$

gdzie zakłada się, że $\det A_{-1} \neq 0$. W podrozdziale 4.3 podaje się dowód głównego w mojej ocenie wyniku rozprawy, Twierdzenia 4.9. Podaje ono oszacowania górne i dolne na wzrost normy operatora półgrupowego. Wzrost ten jest typu wykładniczego z wykładnikiem będącym supremum części rzeczywistej wartości własnych generatora półgrupy. W przypadku gdy supremum nie jest osiągane, funkcja wykładnicza jest mnożona przez czynnik wielomianowy $t^p + 1$, gdzie p jest maksymalnym rozmiarem klatki Jordana macierzy A_{-1} odpowiadającym wartości własnej tej macierzy o maksymalnym module, dla oszacowania dolnego, oraz sumą rozmiarów klatek Jordana tej wartości własnej dla oszacowania górnego. W następnym podrozdziale dowodzi się Twierdzenia 4.19 i 4.20 o maksymalnej asymptotyce, z których pierwsze wyprowadza się z Twierdzenia 4.9. Ostatni podrozdział zawiera podsumowanie wcześnieszych wyników w postaci przedstawienia możliwych zachowań rozwiązań w zależności od widma generatora półgrupy. Należy zauważyć, że wyjściowy układ równań jest rozważany w zespolonej przestrzeni liniowej co może utrudniać interpretacje wyników w zastosowaniach.

Głównym narzędziem użytym w rozważaniach Rozdziału 4 jest analiza spektralna generatora półgrupy definiowanego przez powyższy układ, przeprowadzona w pracy Rabaha, Sklyara i Rezounenko z 2005 roku. Autor przytacza główne potrzebne wyniki z tej pracy w początkowym podrozdziale. Kluczowym chwytem jest tu rozpoczęcie analizy od prostszego równania

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1)$$

i zauważenie, że spektrum $\sigma(\tilde{\mathcal{A}})$ odpowiadającego mu generatora półgrupy $\tilde{\mathcal{A}}$ jest wyznaczone przez widmo $\sigma(A_{-1})$ macierzy A_{-1} zależnością

$$\sigma(\tilde{\mathcal{A}}) = \{0\} \cup \{\ln\mu : \mu \in \sigma(A_{-1})\}.$$

Operator $\mathcal{A}$ odpowiadający wyjściowemu równaniu ma czysto punktowe spektrum a jego wartości własne $\lambda_m^{(k)}$ układają się, mówiąc niezbyt precyzyjnie, w pobliżu nieskończonej ilości rozwiązań $\tilde{\lambda}(k)_m$ równań $\ln\lambda = \mu_m$, $\mu_m \in \sigma(A_{-1})$.

Ostatni Rozdział 5 zawiera pewne zastosowania twierdzeń z Rozdziałów 3 i 4 do analizy układów sterowania opisywanych przez układy z opóźnieniem typu neutralnego. Podaje się tu asymptotykę rozszerzania zbioru osiągalnego przy ograniczonych sterowaniach oraz pewne fakty dotyczące regularnej stabilizowalności układu.

Przechodząc do oceny wyników rozprawy trzeba powiedzieć, że wyniki te stanowią wartościowy wkład w teorię układów z opóźnieniem typu neutralnego. Oszacowanie wzrostu (malenia) normy operatora półgrupy w jawny sposób na podstawie znajomości spektrum generatora półgrupy i wymiarów niektórych jego klatek Jordana pozwala lepiej niż do tej pory zrozumieć dynamikę takiej półgrupy. Te wyniki oceniam wysoko. W rozprawie używany jest wyspecjalizowany aparat teorii półgrup operatorów wymagający szerokiej i dogłębnej znajomości tematu. W mojej ocenie sama rozprawa reprezentuje poziom wyższy niż średnio oczekiwany od rozpraw doktorskich. Z drugiej strony trzeba zaznaczyć, że wyniki w niej zawarte stanowią zawartość dwu publikacji wspólnych z promotorem, gdzie niealfabetyczna kolejność nazwisk wskazuje na większy wkład promotora w ich zawartość.

Poziom redakcji rozprawy oceniam jako dobry choć wkradło się do niej wiele drobnych usterek. Ważniejsze z nich wymieniam niżej.

Odwołanie się do referencji [9] jako podstawowej w badaniu równań typu neutralnego za pomocą techniki półgrup operatorów jest niedokładne. Już kilkanaście lat wcześniej D. Henry wprowadził podobną technikę. Referencje do jego i innych prac na ten temat można znaleźć w cytowanym w rozprawie artykule Bartosiewicza [2], gdzie też rozważana jest ogólniejsza niż w rozprawie klasa układów z opóźnieniem (w przestrzeni rzeczywistej).

Dość częste jest pomijanie kwantyfikatora w ważnych miejscach, czytelnik musi się domyślać lub nawet zgadywać, czy dana własność zachodzi dla, powiedzmy, każdego t, czy istnieje takie t.

Zauważone niejasności merytoryczne, literówki lub błędy ortograficzne:

str. 9, Tw. 2.2 (e): brak znaku normy;

Przykład 2.7: „funkcji ciągłych **ograniczonych**" oraz n zamiast t w definicji funkcji $f_n(x)$;

str. 18: brak definicji półgrupy ograniczonej (czy generowanej przez operator ograniczony?);

literówka w prawej nierówności Tw. 2.39 (b);

niepoprawny zapis w Tw. 2,53 (c);

str. 28: niejasne pojęcie obcięcia operatora, przy używanym oznaczeniu to ma interpretację ograniczenia operatora na podprzestrzeń podczas gdy powinno być poprzedzone złożeniem z odpowiednim rzutowaniem na tą podprzestrzeń (inaczej porównywane operatory są określone na różnych przestrzeniach);

Rozdział 3.2: kilkukrotnie nazwa lemat występuje zamiast twierdzenie i odwrotnie;

Rozdział 3.3: w dowodzie myli się nazwy stwierdzeń (a), (b), (c); w stwierdzeniu (b) brak sprecyzowania dla jakich n ono zachodzi;

str. 37: w określeniu funkcji F mylne określenie przestrzeni w jakich ona działa;

str. 38: błąd ortograficzny w słowie stowarzyszony;

str. 39-40: brak określenia oznaczenia $\delta(\lambda)$, trzeba zgadywać;

główne Twierdzenie 4.9: brak określenia zakresu t w nierównościach (łatwo zgadnąć ale ...);

Wniosek 4.14: brak kwantyfikatora przy t_0;

Twierdzenie 4.18: dlaczego jedna nierówność zawiera x a druga podobna nie zawiera?

Twierdzenie 4.19: brak określenia p, w domysle trzeba szukać w wcześniejszych podrozdziałach;

Początek Rozdziału 4.5: nie udało mi się domyślić o które μ_1 chodzi, na stronie 39 wszystkie μ_i są równoprawne.

Konkluzja. Jak napisałem wcześniej, wyniki rozprawy oceniam wysoko. Spełniają one wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Ich uzyskanie wymagało opanowania zaawansowanych, choć znanych, środków technicznych. Rozprawa, mimo wymienionych usterek, jest nieźle zredagowana i czytelna. Uważam, że spełnia ona w całości warunki stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie jej Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 30 maja 2016 r.

Bronisław Jakubczyk
Instytut Matematyczny PAN