Streszczenie rozprawy doktorskiej

„Ocena asymptotyki rozwiązań układów z opóźnieniem typu neutralnego”

mgr Piotr Polak

Rozprawa poświęcona jest równaniom różniczkowym z rozłożonym opóźnieniem, tj. równaniom, w których zmiana stanu zależy nie tylko od stanu obecnego, ale również od wszystkich stanów na pewnym odcinku czasu poprzedzającym aktualny stan. Mianowicie rozważa się klasę równań zadanych w przestrzeni $\mathbb{C}^n$, postaci

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + \int_{-1}^{0} A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta)d\theta + \int_{-1}^{0} A_3(\theta)z(t+\theta)d\theta, \tag{1}$$

gdzie $\det A_{-1} \neq 0$. Podstawowe podejście do badania równań tej klasy (zaczerpnięte z pracy Burnsa, Herdmana i Stecha z 1983 r.) polega na interpretacji ich jako równań liniowych w pewnej przestrzeni Hilberta. postaci Równanie (1) odpowiada równaniu

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \quad x(t) \in H \tag{2}$$

zadanemu przez liniowy, nieograniczony, gęsto zdefiniowany operator $\mathcal{A}$, będący generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Celem rozprawy jest opisanie asymptotycznego zachowania normy rozwiązań równania (2). Zadanie to jest kontynuacją badań Rabaha, Sklyara i Rezunenko, którzy w jednej ze wspólnych prac w 2005 r. podali kompletną analizę spekrtalną operatora $\mathcal{A}$ występującego w modelu (2) oraz otrzymali warunki - konieczny i dostateczny stabilności asymptotycznej.

W pracy doktorskiej otrzymano m.in. twierdzenie opisujące asymptotykę normy półgrupy $T(t)$ przy $t \to +\infty$ (Tw. 4.9), w którym normę półgrupy ocenia się z góry i z dołu przez funkcje czasu zależne od parametrów związanych z macierzą A_{-1}. Z ocen tych wynika w szczególności, że jeśli indeks wzrostu półgrupy jest zerowy to rozwiązania równania mogą rosnąć najwyżej w tempie potęgowym z ustalonym wykładnikiem, jednakże szybkość tego wzrostu jest istotnie mniejsza od szybkości wzrostu normy półgrupy. W takiej sytuacji powstaje pytanie czy mimo nieograniczoności niektórych rozwiązań może istnieć gęsty zbiór stanów początkowych, dla którego odpowiadające rozwiązania będą dążyć jednostajnie do zera w tempie potęgowym. Pytanie to dotyczy stabilności wielomianowej i jest ono jednym z wątków badanych w rozprawie. W ogólności wiadomo, że dla generatorów półgrup w przestrzeni Banacha lub Hilberta warunkiem koniecznym stabilności wielomianowej jest odpowiednio powolne zbliżanie widma generatora do osi urojonej. W pracy doktorskiej pokazano (Tw. 3.8), że odpowiednie położenie widma jest już warunkiem dostatecznym stabilności wielomianowej dla pewnej klasy półgrup z dyskretnym widmem, zawierającej półgrupy stowarzyszone z równaniem (1).

W rozprawie zawarto również pewne zastosowania otrzymanych wyników w zagadnieniu sterowania dla równania (1). Mianowicie opisano szybkość rozszerzania średnicy zbióru stanów osiągalnych z zera dla sterowań ograniczonych, a także omówiono zagadnienie regularnej stabilizowalności.