

Prof. dr hab. Henryk Hudzik  
Wydział Matematyki i Informatyki UAM  
ul. Umultowska 87  
61-614 Poznań

Poznań, dn. 8.03.2016 r.

### Recenzja

rozprawy doktorskiej Pana mgra Włodzimierza Laskowskiego zatytułowanej  
„Funkcjonały całkowite efektywnej energii dla cienkich membran na przestrzeni  
Orlicza-Sobolewa”

Recenzowana rozprawa dotyczy głównie całkowitej reprezentacji funkcyjnałów efektywnej energii dla cienkich membran określonych na funkcyjnych przestrzeniach Orlicza-Sobolewa. Zaprezentowano w niej też wyniki o osiągnięciu stanu minimum całkowitej energii, tj. istnieniu stanu równowagi tychże membran.

Jest to obszerna rozprawa. Liczy 93 strony gęsto napisanego tekstu. Składa się na nią przedmowa, cztery rozdziały i bibliografia o 91 pozycjach. Nie ma w tej rozprawie wstępu dotyczącego całej rozprawy, ale został on podzielony na mniejsze części i umieszczony na początku każdego rozdziału. Podaje się w nich informacje o celu poszczególnych rozdziałów i jakimi środkami dowodowymi go uzyskano.

Celem pierwszego rozdziału rozprawy jest przedstawienie i udowodnienie wyników dotyczących całkowitej reprezentacji funkcyjnału efektywnej energii dla cienkich membran jako  $\Gamma$ -granicy ciągu przeskalowanych funkcyjnałów energii całkowitej (przy parametrach  $\alpha = 1$  i  $\beta = 0$ ), określonych na refleksywnych przestrzeniach Orlicza-Sobolewa, oraz przedstawienie wyników o osiągnięciu stanu minimum całkowitej energii, czyli stanu równowagi takich membran. Zaprezentowane w tym rozdziale wyniki zostały zawarte w pracy będącej pozycją [66] bibliografii tej rozprawy, opublikowanej w czasopiśmie „Demonstratio Mathematica” w roku 2013. Jednym z głównych środków dowodowych użytych w tym rozdziale jest uogólnienie na przestrzenie Orlicza-Sobolewa  $W^{1,M}$  klasycznego wyniku Acerbi-Fusco z pracy [2] dotyczącego quasi-wypukłości i słabej półciągłości z dołu ciągu funkcyjnałów całkowitych określonych na przestrzeniach Sobolewa  $W^{1,p}$ , które to uogólnienie zostało opublikowane przez M. Focardi w pracy [41].

W rozdziale drugim przedstawiono wyniki dotyczące całkowitej reprezentacji funkcyjnału efektywnej energii dla cienkiej membrany z dodatkowym dwuwymiarowym momentem uginającym, jako  $\Gamma$ -granicy ciągu przeskalowanych funkcyjnałów energii całkowitej (przy parametrach  $\alpha = 1$  i  $\beta = 0$ ), określonych na refleksywnych przestrzeniach Orlicza-Sobolewa  $W^{1,M}$  oraz wyniki o osiągnięciu stanu minimum całkowitej energii. Dla udowodnienia tych wyników pomocny był wynik Acerbi-Fusco wspomniany przy omawianiu rozdziału pierwszego, uogólnienie na przestrzenie Orlicza-Sobolewa twierdzenia zaprezentowanego przez Dacorogna w pracy [34], uogólnienie na przestrzenie Orlicza-Sobolewa lematu Fonesca-Müllera-Pedregala o rozkładzie z pracy [45], stosunkowo nowe, bo z roku 2005, wyniki Alberico i Cianchi dotyczące różniczkowalności funkcyj na przestrzeniach Orlicza-Sobolewa oraz lemat Płuciennika-Tiana-Wanga dotyczący operatora subróźniczki w przestrzeniach Orlicza. Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy [67] przez wydawnictwo „Banach Center Publications”.



Na rozdział trzeci składa się sformułowanie i udowodnienie wyników dotyczących reprezentacji całkowitej funkcjonału efektywnej energii dla cienkich membran z dodatkowym trójwymiarowym momentem uginającym, jako  $\Gamma$ -granicy ciągu przeskalowanych funkcjonałów energii całkowitej (przy parametrach  $\alpha = \beta = 1$ ) określonych na refleksyjnych przestrzeniach Orlicza-Sobolewa oraz przedstawienie wraz z dowodami wyników o osiągnięciu stanu minimum energii całkowitej. W dowodach tych wyników korzystano z pomocniczych rezultatów, które wymienione zostały wcześniej jako rezultaty pomocnicze dla udowodnienia wyników z rozdziału drugiego, a ponadto z uogólnienia na przestrzenie Orlicza lematu Riemanna-Lebesgue'a dotyczącego przestrzeni  $L^p$ , zaprezentowanego w monografii Pedregala [84].

W rozdziale czwartym, którego większość wolałbym widzieć jako rozdział pierwszy, podaje się terminologię, ustala notację i przypomina dobrze znane własności przestrzeni Orlicza i Orlicza-Sobolewa,  $\Gamma$ -granicy, quasi-wypukłości oraz miar Radona. Zawiera on także wyniki, z których korzysta się w dowodach twierdzeń z wcześniejszych rozdziałów, a także kilka pomocniczych rezultatów, które stanowią uzupełnienie głównych wyników. Na końcu tego rozdziału podano ciekawe przykłady ilustrujące niektóre wyniki z rozdziałów 1, 2 i 3 oraz podano funkcje gęstości funkcjonałów całkowitych efektywnej energii rozpatrywanych w pierwszych trzech rozdziałach.

Dla uzyskania swoich wyników Autor musiał dobrze opanować zagadnienie całkowitej energii dla cienkich membran w  $\mathbb{R}^3$  oraz teorię miary i całki, teorię przestrzeni Orlicza i Orlicza-Sobolewa, a tym samym teorię dystrybucji, rachunek wariacyjny, ogólną teorię przestrzeni Banacha, subróżniczki dla funkcji z przestrzeni Orlicza i Orlicza-Sobolewa, za pomocą których buduje się funkcjonały o normie 1, wydobywające normy elementów z tych przestrzeni, a także niektóre zagadnienia z teorii optymalizacji. Należy podkreślić, że rozwiązywanie problemów z matematyki stosowanej (a takiej matematyki recenzowana rozprawa dotyczy) wymaga podwójnej biegłości, a mianowicie w zakresie teoretycznego aparatu matematycznego stosowanego do opisu zjawisk występujących w przyrodzie, w ekonomii itp. oraz dobrego rozumienia tych zjawisk, dla których matematyczny opis się znajduje.

W mojej opinii recenzowana praca doktorska dotyczy matematyki stosowanej i zawiera trudne, nietrywialne i wartościowe wyniki z zastosowań przestrzeni Orlicza-Sobolewa do opisu całkowitych funkcjonałów efektywnej energii dla cienkich membran. Przedstawione w niej wyniki zostały już w większości opublikowane, więc znalazły już uznanie u recenzentów czasopism i wydawnictw, które je opublikowały. Tekst tej pracy jest napisany bardzo starannie, ale jego zredagowanie nie jest najlepsze. Uważam, że przy bardzo klarownym zredagowaniu wyniki tej rozprawy mogłyby być opublikowane w znacznie lepszych czasopismach niż to ma miejsce. Nie jest to mój zarzut a raczej rada na przyszłość.

Wyniki z tej pracy uzyskane zostały w oparciu o bogatą najnowszą literaturę światową. We wstępach do poszczególnych rozdziałów Autor rozprawy odwołuje się do tej literatury, co świadczy o tym, że prowadzi On badania naukowe w ramach problematyki bardzo aktualnej i że obszerna bibliografia do tej rozprawy nie jest rozdmuchana sztucznie.

Reasumując stwierdzam, że w mojej opinii recenzowana rozprawa doktorska Pana mgra Włodzimierza Laskowskiego jest bardzo wartościowa i spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę zatem o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

*Handwritten signature*