

<b>Zad. E 01</b>	<b>I PRACOWNIA FIZYCZNA Instytut Fizyki US</b>
<b>Temat:</b>	<b>Wyznaczanie parametrów soczewek przy wykorzystaniu metody Bessela i sferometru</b>

*Cel:* wyznaczenie ogniskowej soczewki skupiającej i pomiar ogniskowych soczewki skupiającej i układu soczewek (skupiająca i rozpraszająca), rozpraszającej metodą Bessela, pomiar krzywizn soczewek za pomocą sferometru. Wykształcenie u studenta samodzielnego posługiwania się aparaturą pomiarową oraz umiejętności analizy i interpretacji wyników pomiarów.

*Przyrządy:* ława optyczna z podziałką, 2 soczewki skupiające, soczewka rozpraszająca, źródło światła z płytką przedmiotową ze strzałką jako przedmiot świecący, ekran, sferometr pierścieniowy, nóżkowy.

## 1. ZAGADNIENIA

1. Rodzaje soczewek. Bieg światła w soczewce. Powstawanie obrazów w soczewkach.
2. Równania soczewek cienkich. Układy soczewek.
3. Metoda Bessela.
4. Wady soczewek. Aberracja sferyczna i chromatyczna.

## 2. OPIS ZAGADNIENIA

Na podstawie literatury zapoznać się z opisami.

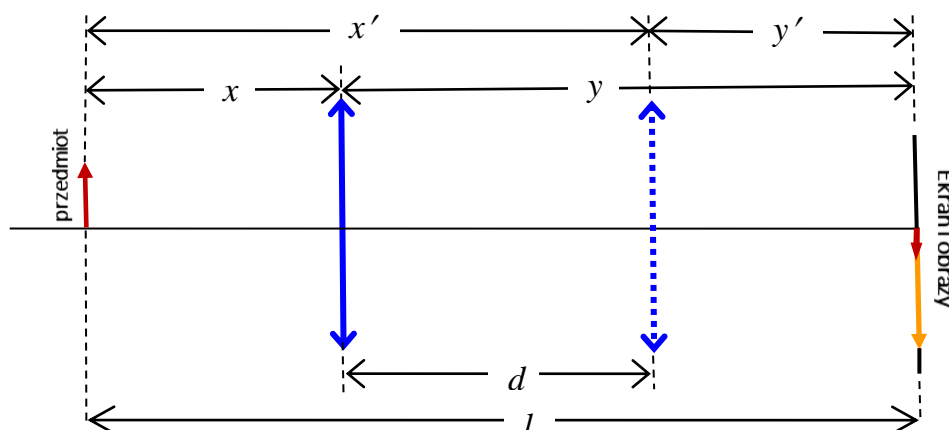
### A. Metoda Bessela

Metoda ta lepiej nadaje się do wyznaczania ogniskowej soczewki rzeczywistej, gdyż pozwala pominąć problemy wynikające z nieznanymi położenia środka optycznego soczewki rzeczywistej z jaką mamy przeważnie do czynienia.

Zależność między odległością przedmiotu  $x$ , odległością obrazu  $y$  i ogniskową soczewki  $f$  wyraża równanie soczewki

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (1)$$

Związek ten wykorzystuje się w bezpośrednim pomiarze ogniskowej soczewek skupiających. W przypadku soczewki nie będącej cienką, układu soczewek, należałoby precyzyjniej określić odległości  $x$  i  $y$ ; nie jest bowiem oczywiste położenie środka optycznego. Nie zawsze pokrywa się on ze środkiem geometrycznym. Sposób na ominięcie tej trudności podał Bessel (rys. 1).



Rys. 1. Zasada metody Bessela – polega na pomiarze odległości  $d$ , przy zadanym  $l$ , i wyliczeniu ogniskowej. Linia przerywaną zaznaczono drugie położenie soczewki w którym na ekranie wytworzy się ostry, pomniejszony obraz świecącego przedmiotu. Wówczas  $x' = y$  a  $y' = x$ .

Przy stałej odległości  $l$  przedmiotu od ekranu istnieją dwa położenia<sup>1</sup> soczewki  $x$  i  $x'$ , w których na ekranie pojawiają się wyraźne obrazy. W położeniu pierwszym obraz jest powiększony, w drugim zmniejszony.

Ponieważ

$$x + y = l \quad \text{oraz} \quad y - x = d, \quad (2)$$

więc

$$x = \frac{l-d}{2} \quad \text{oraz} \quad y = \frac{l+d}{2}. \quad (3)$$

Podstawiając (3) do (1) otrzymujemy

$$f = \frac{1}{4} \left( l - \frac{d^2}{l} \right). \quad (4)$$

Stąd wynika, że odległość  $l$  musi być większa od  $4f$ .

Soczewki rozpraszające nie wytwarzają obrazów rzeczywistych na ekranie. Dla doświadczalnego wyznaczenia ich ogniskowych zestawia się je z soczewką skupiającą tak, by uzyskany układ optyczny wykazywał własności skupiające. Dla doświadczalnego wyznaczenia ich ogniskowych zestawia się je z soczewką skupiającą tak, by uzyskany układ optyczny wykazywał własności skupiające.

Ogniskowa  $f$  układu soczewek jest dana równaniem

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_s} + \frac{1}{f_r} - \frac{\delta}{f_s f_r}, \quad (5)$$

gdzie

$f_s$  – ogniskowa soczewki skupiającej,

$f_r$  – ogniskowa soczewki rozpraszającej,

$\delta$  – odległość między soczewkami.

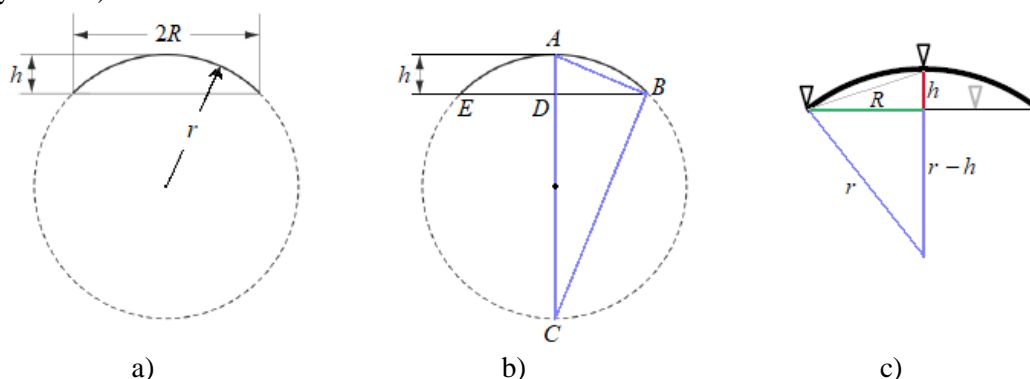
Z równania (5) otrzymujemy

$$f_r = \frac{f(f_s - \delta)}{f_s - f}, \quad (6)$$

czyli wielkość ogniskowej soczewki rozpraszającej  $f_r$  wyznaczmy na podstawie zmierzonych wartości  $f_s$ ,  $f_r$  i  $\delta$ .

## B. Sferometr – pomiar promienia krzywizny

Sferometr jest prostym urządzeniem do pomiaru strzałki  $h$  czaszy kulistej o znanej średnicy podstawy  $2R$  (Rys. 2 i 4).



Rys. 2. Rysunek pomocniczy do wyprowadzenia wzoru (7). Na rys. 4) trzy trójkątki oznaczają nóżki sferometru, które leżą na okręgu o średnicy  $2R$ . Odcinek  $EB$  odpowiada średnicy  $2R$  sferometru; odcinek  $AD$  ( $= h$ ) – wysokość strzałki, czaszy kulistej;  $AC$  ( $= 2r$ ) – średnica krzywizny soczewki. Na rys. b) kąt przy wierzchołku  $B$  jest prosty,  $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ , zatem:  $h/R = R/(2r - h)$ , stąd wzór (7).

Wartość tej strzałki związana jest z promieniem krzywizny  $r$  badanej powierzchni, następującą zależnością, znaną z geometrii (Rys. 2):

<sup>1</sup> Patrz np.: M. Nowina-Konopka, A. Zięba: Ćwiczenie 53. *Soczewki*. [www.ftj.agh.edu.pl/zdf/zeszyt/3\\_53n.pdf](http://www.ftj.agh.edu.pl/zdf/zeszyt/3_53n.pdf)

$$R^2 = h(2r - h). \quad (7)$$

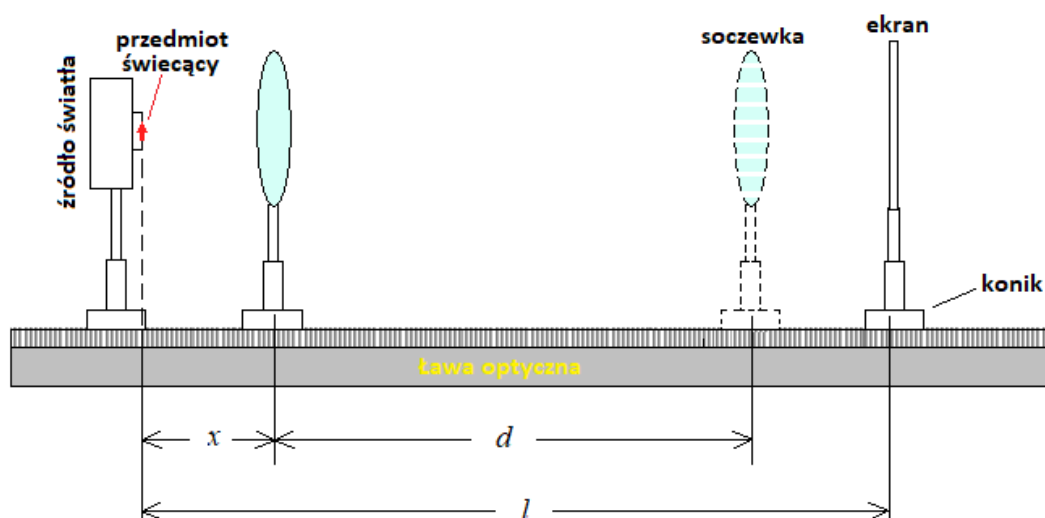
Stąd

$$r = \frac{R^2 + h^2}{2h}. \quad (8)$$

Sferometr składa się z podstawy w postaci metalowego pierścienia oraz zegarowego czujnika mikrometrycznego – rys. 4 a) i b) bądź trójnogu i śruby mikrometrycznej – rys. 4 c). Do regulacji (zerowania) sferometru służy śruba umożliwiająca swobodny przesuw czujnika oraz obrotowa podziałka, wyskalowana najczęściej w setnych bądź dziesiątych częściach milimetra.

### 3. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

#### A. Wyznaczania parametrów dla metody Bessela



Rys. 3. Schemat układu doświadczalnego.

1. Na jednym końcu ławy optycznej umieścić oświetlony przedmiot, a na drugim ekran. Zmierzyć odległość  $l$  między przedmiotem a ekranem. Pomiar wykonać 6 razy.
2. Dla soczewki skupiającej:
  - Umieścić soczewkę na koniku i przesuwać ją do chwili uzyskania ostrego, powiększonego, obrazu przedmiotu na ekranie. Zmierzyć wartość  $x$ . Pomiar wykonać 6x.
  - Przesunąć soczewkę bliżej ekranu, aż do uzyskania na nim obrazu ostrego pomniejszonego. Zmierzyć wartość  $y$ . Pomiar powtórzyć 6x.

**Pomiary wykonać dla dwóch soczewek skupiających.**

3. Wyznaczyć metodą Bessela odległość ogniskową układu z nałożonych na siebie soczewek: skupiającej o ogniskowej  $f_s$ , wyznaczonej w poprzednim pomiarze oraz rozpraszającej – o nieznannej ogniskowej  $f_r$ . Pomiary wykonać wg punkt 2.
4. Zmierz kilkakrotnie odległość między środkami soczewek celem uwzględnienia poprawki wynikającej ze wzoru (5).

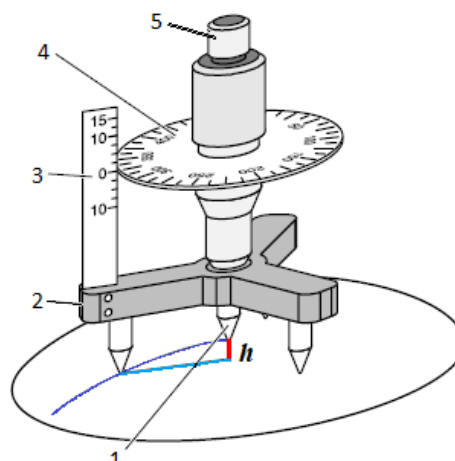
#### B. Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki przy użyciu sferometru

1. Zapoznać się z działaniem sferometru nóżkowego. Zanotować jakie jest przesunięcie trzpienia sferometru (ozn. 1 na rys. 4) dla pełnego obrotu tarczy obrotowej sferometru nóżkowego (ozn. 4 na rys. 4) – określić skok śruby (wskazane zmierzenie suwmiarką odległości przesunięcia brzegu tarczy obrotowej sferometru wzdłuż nieruchomej skali – ozn. 3 na rys. 4) dla 10 czy 20 pełnych obrotów.

2. Na kartce papieru odcisnąć 4x ślady nóżek – skorzystać z kalki ołówkowej. Zmierzyć po 3x odległości między poszczególnymi śladami par nóżek – pomiary można wykonać w domu.
3. Pomiar promienia krzywizny soczewki.
  - a) Ustawić sferometr na szklanej płytce i określić położenie punktu odniesienia.
  - b) Ustawić sferometr na badanej soczewce i odczytać wartość strzałki  $h$ .

Uwaga: Wartość  $h$  strzałki czaszy kulistej soczewki jest różnicą wskazań czujnika na płytce płasko-równoległej i na mierzonej powierzchni.

Czynności te powtórzyć co najmniej 5x, dla każdej soczewki.



Rys. 4. Sferometr nóżkowy. Skorzystano z rys. z instrukcji f-my Leybold [6].

#### 4. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

1. Określić niepewności graniczne pomiarów bezpośrednich.
2. Obliczyć wartości średnie i odchylenia standardowe mierzonych wielkości. Dla małej próby zastosować współczynniki  $t_{n,\alpha}$  Studenta dla prawdopodobieństwo objęcia (dawniej: poziom ufności)  $\alpha = 0,95$ . Obliczyć odległość  $d$  między dwoma pozycjami soczewki oraz niepewność  $u(d)$  (wzór A w dodatku\*).
3. Obliczyć wartości ogniskowych obu soczewek skupiających ze wzoru (4).
4. Obliczyć niepewność pomiaru\*  $u(f_i)$ ,  $i = 1, 2$  dla obu soczewek skupiających.
5. Obliczyć wartość ogniskowej  $f$  układu soczewek na podstawie wzoru (4).
6. Oblicz niepewność pomiaru\*  $u(f)$  dla dwóch układów soczewki rozpraszającej z soczewką wypukłą.
7. Obliczyć wartość ogniskowej  $f$  układu soczewek na podstawie wzoru (4).
8. Obliczyć wartość ogniskowej soczewki rozpraszającej korzystając ze wzoru (6). W przypadku braku możliwości wyznaczenia czy oszacowania odległości między soczewkami przyjmij  $\delta = 0$ . W obliczeniach zwrócić uwagę na znaki w oznaczeniach dla soczewki skupiającej i rozpraszającej.
9. Obliczyć niepewność pomiaru\*  $u(f_r)$ .
10. Obliczyć wartość promieni krzywizny soczewek wyznaczanych za pomocą sferometru (wzór (8)). W przypadkach uzasadnionych możesz pominąć soczewkę rozpraszającą.
11. Obliczyć niepewność pomiaru\*  $u(r)$ .
12. Obliczyć współczynnik załamania szkła soczewek skupiających użytych w doświadczeniu korzystając ze wzoru soczewkowego (szlifierzy)

$$\frac{1}{f_i} = (n-1) \frac{1}{r_i}, \quad i = 1, 2.$$

13. Obliczyć niepewność pomiaru\*  $u(n)$ .
14. Korzystając z tablic, odszukać rodzaj szkła o zbliżonej wartości współczynnika załamania  $n$  do otrzymanej.
15. Porównaj otrzymane wartości na współczynnik  $n$  wyznaczone z metody Bessela i przy skorzystaniu ze sferometru – skorzystaj z kryterium zgodności wyników pomiarów – wzór (E) w dodatku\*.

#### 5. Dokonać dyskusji wyników, zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia i jego realizacji.

## LITERATURA

1. Pawlak B., Gąsowski R., Kozłowski J.: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki dla przyrodników*. Szczecin, Wyd. Naukowe US, 2005.
2. Dryński T.: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Wyd. VI (lub następne). Warszawa, PWN, 1977.
3. Podręczniki akademickie, np. Sz. Szczęniowski, *Fizyka doświadczalna*, t. IV, *Optyka*. Warszawa, PWN.
4. Szydłowski H.: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Warszawa, PWN, 1999.
5. *Wyznaczanie ogniskowych soczewek*. <http://matrix.ur.krakow.pl/~krebilas/Gotowe/cw-42.pdf>  
*Wyznaczanie ogniskowych soczewek i badanie ich wad*. [www2.if.uj.edu.pl/pl/edukacja/pracownia\\_I/O2\\_OS.pdf](http://www2.if.uj.edu.pl/pl/edukacja/pracownia_I/O2_OS.pdf)  
Wyznaczanie ogniskowej soczewki cienkiej metodą graficzną i analityczną.  
<http://kawe.wfis.uni.lodz.pl/IPF/Instrukcje/O-9.pdf>  
*Pomiar ogniskowych soczewek cienkich*.  
<http://pracownie1.fuw.edu.pl/optometria/zadania/lab%20202%20-nowa%20pomiar%20ogniskowych%20soczewek%20cienkich.pdf>
6. *Instrukcja sferometru nóżkowego*. [http://dydfiz.univ.szczecin.pl/pdf/pdf\\_258.pdf](http://dydfiz.univ.szczecin.pl/pdf/pdf_258.pdf)

### \*Dodatek

#### 1. Niepewność pomiaru

Niepewność całkowita wielkości  $x$  mierzonej bezpośrednio:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{(\Delta_d x)^2}{3} + \frac{(\Delta_t x)^2}{3} + u_e^2(x)} \quad (\text{A})$$

gdzie pierwszy składnik pod pierwiastkiem – niepewność standardowa średniej;  $\Delta_d x$  – niepewność wzorcowania (niepewność wynikająca z dokładności przyrządu);  $\Delta_t x$  – niepewności wyników zaczerpniętych z literatury, tablic lub kalkulatora;  $u_e(x)$  – niepewność standardowa eksperymentatora.

**Złożoną niepewność standardową  $u(y)$**  – niepewność dla funkcji kilku zmiennych  $y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  oblicza się korzystając z **prawa przenoszenia niepewności** pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)},$$

gdzie  $N$  – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio,  $c_i$  – współczynnik wrażliwości,

$u_i(y) \equiv c_i u(x_i)$  – udziały niepewności.

Obliczanie niepewności  $u(y)$  można dokonać bez odwoływania się do rachunku różniczkowego korzystając z metody elementarnej – wzoru numerycznego wskazanego w *Przewodniku GUM*<sup>2</sup> poprzez obliczanie *udziałów niepewności*

$$u_i(y) = \frac{1}{2} \left| f(x_1, \dots, x_i + u(x_i), \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - u(x_i), \dots, x_n) \right| \quad (\text{B})$$

$u_i(y)$  – zmiana wartości funkcji  $f$  spowodowana zmianą  $x_i$  o  $+u(x_i)$  i o  $-u(x_i)$ .

$u(y)$  obliczamy jako sumę geometryczną udziałów  $u_i(y)$ :

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)}. \quad (\text{C})$$

W przypadku gdy zależność funkcyjna dla  $f$  ma postać jednomianu:  $y = c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ,  $c$  – stała, wówczas wygodnie jest korzystać z prawa propagacji niepewności względnych<sup>3</sup>

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [\alpha_i u_i(x_i)]^2}, \quad (\text{D})$$

gdzie  $u_i(x_i) \equiv u(x_i)/|x_i|$  – względna niepewność pomiaru wielkości  $x_i$ .

<sup>2</sup> *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1993, 1995; (dokument wydany w imieniu BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OML). Fundamentalny dokument zbiorowego autora – zespołu międzynarodowych organizacji naukowo-technicznych – dla ustanowienia procedury wyrażania niepewności pomiaru, jest wydany przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) Publikacja jest udostępniona online:  
[http://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM\\_100\\_2008\\_E.pdf](http://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf)

<sup>3</sup> Niepewność względna w *Przewodniku GUM* nie ma oddzielnego oznaczenia. W sytuacjach nie powodujących nieporozumień można stosować zapis z indeksem dolnym „r” tj.  $u_i(y) \equiv u_i(y)/y$ .

## 2. Porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z innym wynikiem, np. tablicowym  $x^T$ , korzystamy z przedziałowego **kryterium zgodności wyników pomiarów**, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$|\bar{x} - x^T| \leq u(\bar{x}) + u(x^T). \quad (E)$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność  $u$  przez *niepewność rozszerzoną*  $U$ , gdzie  $U(x) = ku(x)$  a współczynnik  $k$ , w naszym przypadku należy przyjąć 2. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*) – zdefiniowana przez „wielkość określającą przedział wokół wyniku pomiaru, taki że można oczekiwać, iż obejmie on dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przyporządkować wielkości mierzonej.”

Obie niepewności są powiązane zależnością  $U = ku$ , gdzie  $k$  – współczynnik rozszerzenia. Współczynnik rozszerzenia  $k$  zależy od liczby pomiarów oraz poziomu ufności (określany jest często mianem *współczynnika Studenta-Fishera*  $t_{n,a}$ ), w większości przypadków przyjmujemy  $k = 2$