Zad. E08	**I PRACOWNIA FIZYCZNA** **Instytut Fizyki US**
Temat:	**Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki płasko-wypukłej metodą pierścieni Newtona i sferometru**

Cel: wyznaczenie promienia krzywizny soczewki płasko-wypukłej metodą pomiaru promieni interferencyjnych. Wykształcenie u studenta samodzielnego posługiwania się aparaturą pomiarową oraz umiejętności analizy i interpretacji wyników pomiarów.

Przyrządy: mikroskop – stolik wyposażony w dwie śruby mikrometryczne, lampa sodowa o długości fali światła żółtego 589,3 nm, soczewka płasko-wypukła, szklana płytka równoległościenna, płytka mikrometryczna; sferometr.

1. ZAGADNIENIA

1. Budowa mikroskopu, zasada jego działania.
2. Zjawisko dyfrakcji i interferencji światła.
3. Doświadczenie Younga. Warunki powstawania minimum i maksimum interferencyjnego.
4. Superpozycja fal, fale spójne, interferencja fal jako szczególny przypadek superpozycji fal. Zasada Huygensa.
5. Powstawanie pierścieni Newtona. Wyprowadzić wzór na promień pierścienia Newtona. Dyfrakcja fal świetlnych.

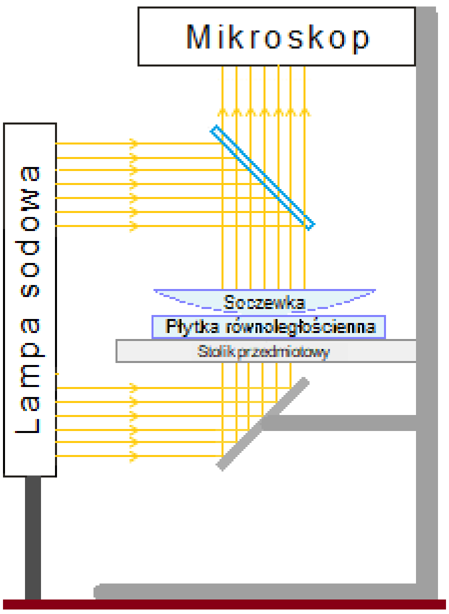
2. OPIS ZAGADNIENIA

A. Pierścienie Newtona

Zjawisko interferencji światła możemy obserwować za pomocą zestawu złożonego z płytki szklanej i soczewki płasko-wypukłej – rys.1. Za pomocą takiego zestawu można uzyskac na przemian jasne i ciemne pierścienie interferencyjne. Układy pierścieni interferencyjnych (rys.2) były obserwowane już w XVII wieku. Zostały odkryte przez R. Boyle'a i R. Hooke'a, natomiast I. Newton zbadał powstawanie pierścieni w świetle odbitym i przechodzącym, wykonał dokładne pomiary średnicy pierścieni różnej barwy.

Obserwacja pierścieni pozwala przeprowadzić szybką i dokładną kontrolę jakości gładkości powierzchni polerowanych – szlifów powierzchni płaskich i soczewek.

Schemat układu pomiarowego wykorzystywanego w doświadczeniu ukazuje rys. 1. Promienie ze źródła światła, u góry – padają na szybkę, płytkę światłodzielącą lub, na dole – odbijają się od lusterka. Część światła – u góry, odbija w kierunku stolika mikroskopu, na którym leży płytka równoległościenna, a na niej soczewka płasko-wypukła. Promienie świetlne padające normalnie na górną, płaską powierzchnię soczewki płasko-wypukłej wchodzą do wnętrza soczewki, gdzie odbijają się częściowo na dolnej, zakrzywionej powierzchni soczewki, a częściowo przechodzą przez tę powierzchnię i po przejściu cienkiej warstwy w powietrzu, o zmiennej grubości h – rys. 3, między soczewką a płytką, padają na górną powierzchnię płytki równoległościennej. Po odbiciu od niej i ponownym wejściu do soczewki będą mogły interferować z promieniami odbitymi od wypukłej strony soczewki gdyż są wzajemnie spójne jako pochodzące z podziału tego samego promienia macierzystego a różnica dróg optycznych między nimi nie jest duża ($< 100\lambda$). Inne promienie nie spełniają tych warunków.



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego.

Różnica dróg optycznych promieni interferujących dana jest wzorem

$$\Delta = 2h + \lambda/2, \tag{1a}$$

gdyż promień biegnący w powietrzu (po wyjściu z soczewki) doznaje przy odbiciu od powierzchni szklanej płytki zmiany fazy na przeciwną (zmiana fazy o 180°) co odpowiada drodze $\lambda/2$. Natomiast promień, który biegnie w soczewce, odbija sie od jej dolnej powierzchni i nie zmienia fazy.

Natomiast promienie odbijające się od lusterka, przechodzą przez płytkę równoległościenną, padają na soczewkę – część przechodzi do jej wnętrza a część odbija się od jej powierzchni i z kolei, część pada na płytkę. Następnie, część tego światła odbija się od górnej powierzchni płytki i pada na powierzchnię soczewki. Z kolei część tego światła przechodzi do jej wnętrza. Promienie te po wejściu do soczewki będą mogły interferować z promieniami wchodzącymi bez odbić. W tym przypadku różnica dróg optycznych promieni interferujących jest równa

$$\Delta = 2h, \tag{1b}$$

gdyż mamy parzystą liczbę odbić, gdzie zmiana fazy po odbiciach jest równa fazie fali pierwotnej.

Z zagadnień dotyczących interferencji fal, szczególnie interferencji w cienkich warstwach, warunki wzmocnienia i osłabienia interferujących fal – interferencja konstruktywna i destruktywna, zapiszemy w postaci

$$\Delta_{\max}(k) = k\lambda \quad \text{i} \quad \Delta_{\min}(k) = (k + 1/2)\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Porównując (1) i (2) otrzymujemy dla przypadku promieni padających od góry (rys. 1)

$$h_{\max}(k) = (k - 1/2)\lambda/2 \quad \text{i} \quad h_{\min}(k) = k\lambda/2, \tag{2a}$$

natomiast dla promieni przechodzących od dołu (rys. 1)

$$h_{\max}(k) = k\lambda/2 \quad \text{i} \quad h_{\min}(k) = (k - 1/2)\lambda/2 \tag{2b}$$

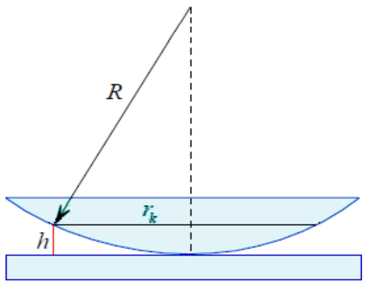
Różnica dróg jest stała dla tej samej wartości h dlatego też uzyskujemy obraz koncentrycznych pierścieni na przemian jasnych i ciemnych. Przy czym dla promieni padających od góry pierwszy środkowy pierścień jest ciemny Jest to doświadczalne potwierdzenie faktu, że chociaż różnica dróg geometrycznych promieni wynosi zero (soczewka przylega do płytki), to różnica dróg optycznych wynosi $\lambda/2$. Natomiast promień, który biegnie w soczewce, odbija się od jej dolnej powierzchni i nie zmienia fazy. Z kolei dla promieni przechodzących od dołu pierwszy środkowy pierścień jest jasny. Przypadki te ilustruje rys. 3.

Zależność w (2) h od promienia r można otrzymać z prostych rozważań geometrycznych, na podstawie rys. 2 oraz rys. 4 i opisu do niego, zachodzi związek

$$r^2 = 2Rh - h^2.$$

Ponieważ promień krzywizny R jest duży, czyli $R \gg h$ i $2Rh \gg h^2$, więc możemy zaniedbać wyraz h^2 otrzymując

$$r^2 = 2Rh. \tag{3}$$



Rys. 2. Soczewka na płytce z ozn. wielkości do wyznaczenia h.

Łącząc wzory (2) i (3) możemy wyrazić kwadrat promienia prążka następująco:

$$r^2_{\max}(k) = (k - 1/2)\,\lambda R \quad \text{i} \quad r^2_{\min}(k) = k\lambda R, \tag{4a}$$

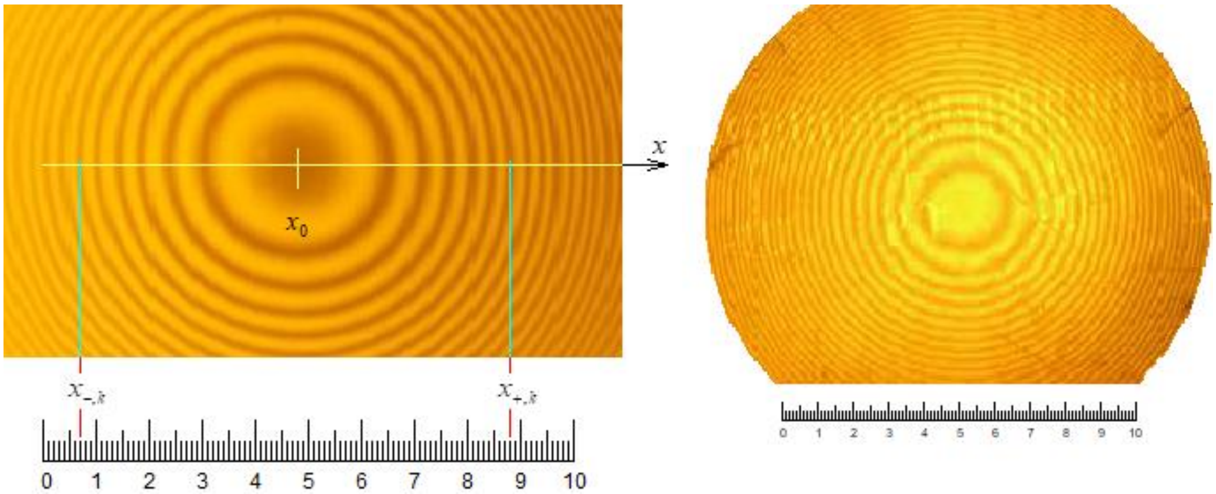
w przypadku ciemnego prążka pośrodku, a w przypadku jasnego

$$r^2_{\max}(k) = k\lambda R \quad \text{i} \quad r^2_{\min}(k) = (k - 1/2)\,\lambda R \tag{4b}$$

Powyższe wzory pozwalają na wyznaczenie związku miedzy promieniem krzywizny soczewki R, promieniami pierścieni Newtona i długością fali λ padającego światła. Korzystając z zależności (4) otrzymujemy wyrażenie na promień krzywizny soczewki

$$R = \frac{r_{\min}^2(k_2) - r_{\min}^2(k_1)}{(k_2 - k_1)\lambda} \tag{5}$$

Podobny związek uzyskamy dla prążków jasnych rzędu k_1 i k_2. Do obliczenia R z (5) należy brać prążki o dużych wartościach różnicy między k_2 i k_1.



Rys. 3. Typowe kształty pieścieni Newtona w świetle monochromatycznym i metoda ich pomiaru. Oba obrazy interferencyjne są względem siebie jak negatyw i pozytyw – na lewo (prawo) jest ciemny (jasny) środek pola widzenia. Na rys. po lewej (prawej) obraz jest w świetle przechodzącym (odbitym) przez układ płytki równoległościennej (po odbiciu światła z lampy od lusterka mikroskopu) i soczewki – rys. 1. Poniżej obrazu interferencyjnego jest uwidoczniona skala okularu mikroskopu służąca do określenia wartości położenia prążków. Pionowymi liniami na lewym rys. zaznaczono położenie ciemnego pierścienia dla k = 6 oznaczając je przy skali $x_{-,k}$ na lewo oraz $x_{+,k}$ na prawo od ciemnego prążka zerowego x_0. Pierścienie ustawiamy w polu okularu za pomocą śrub na stoliku mikroskopu tak aby za pomocą skali móc określić ich położenie. Obrazy prążków zaczerpnięto z sieci.

B. Sferometr – pomiar promienia krzywizny

Sferometr jest prostym urządzeniem do pomiaru strzałki h czaszy kulistej o znanej średnicy podstawy $2R$ (Rys. 4 i 5). Wartość tej strzałki związana jest z promieniem krzywizny r badanej powierzchni, następującą zależnością, znaną z geometrii (Rys. 4):

$$R^2 = h(2r - h). \tag{6}$$

Stąd

$$r = \frac{R^2 + h^2}{2h}. \tag{7}$$

Sferometr składa się z podstawy w postaci metalowego pierścienia oraz zegarowego czujnika mikrometrycznego – rys. 5 a) i b). Do regulacji (zerowania) sferometru służy śruba umożliwiająca swobodny przesuw czujnika oraz obrotowa podziałka, wyskalowana najczęściej w setnych bądź dziesiątych częściach milimetra.

3. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

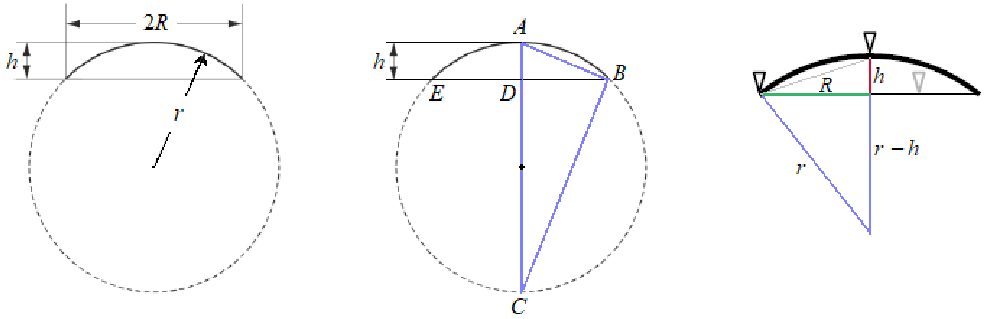
A. Czynności początkowe.

1. Włączyć lampę sodową i odczekać ok. 8 minut aż do całkowitego rozżarzenia lampy.
2. Sprawdź czy na stoliku mikroskopu z pokrętłami przesuwu stolika – kierunki lewo-prawo, przód-tył z dźwignią zaciskową dla szkiełka przedmiotowego jest położona soczewka – jeśli tak:
   a) ustaw ostrość widzenia do własnego wzroku, skorzystaj z opisu ustawień w p. C;
   b) ustaw odpowiednie oświetlenie porzez regulację kąta nachylenia zwierciadła pod stolikiem mikroskopu i płytki światłodzielącej, powinna być ustawiona pod kątem ok. 45°;

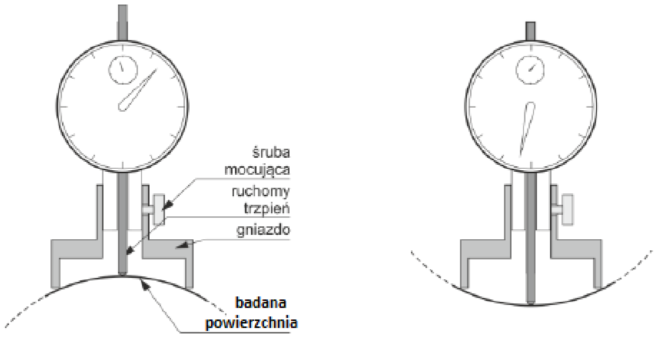
c) dokonaj obserwacji – powinny być widoczne pierścienie, jeśli nie wykonaj polecenia z p. C;

d) zwrócić uwagę na zerowy prążek – czy jest ciemny czy jasny. Przyjmij odpowiednią strategię wyboru co najmniej 10 pierścieni do pomiaru ich położenia – na lewo i na prawo od prążka zerowego, wskazane aby wybierać je z pewnym skokiem np. co piąty.

3. Dokonaj pomiaru położenia pierścieni interferencyjnych wg p. C jeśli nie ma ustawionych pierścieni przejdź do p. C.



Rys. 4. Rysunek pomocniczy do wyprowadzenia wzoru (1). Na rys. c) trzy trójkąciki oznaczają nóżki sferometru, które leżą na okręgu o średnicy 2*R*. Odcinek *EB* odpowiada średnicy 2*R* sferometru (promień wewnętrzny pierścienia; odcinek *AD* (= *h*) – wysokość strzałki, czaszy kulistej; *AC* (= 2*r*) – średnica krzywizny soczewki. Na rys. b) kąt przy wierzchołku *B* jest prosty, $\Delta ABD \sim \Delta BCD$, zatem: $h/R = R/(2r - h)$, stąd wzór (6).



a) b)

Rys. 5. Sferometr pierścieniowy, pomiar powierzchni wypukłej – a) i wklęsłej – b).

Skorzystano z rys. z instrukcji PWr *Pomiar odległości ogniskowych soczewek*,
Sferometr pierścieniowy ma czujnik zegarowy nałożony na jego trzpień gniazdem (pierścieniem). Przesuw trzpienia jest przekazywany za pomocą specjalnego mechanizmu przekładniowego wskazówce, która obraca się o odpowiedni kąt na tarczy ze skalą (pełny obrót wskazówki odpowiada na ogół przesunięciu o 1 mm, a wartość działki elementarnej podziałki wynosi 0,01 mm).

B. Pomiar promieni pierścieni interferencyjnych.

1. Przesunąć układ na stoliku mikroskopu tak, aby centrum pierścieni (jasne pole) znajdowało się w polu widzenia okularu – najlepiej na środku.
2. Odczytać wartości położeń na skali okularu: $x_{-,\,k}$ – na lewo oraz $x_{+,\,k}$ – na prawo od prążka zerowego x_0 wybranych pierścieni np. dla $k = 2,\ 6,\ 10,\ 14$ itd. lub z innym skokiem, niekoniecznie równym. Pomiary powtórzyć, najlepiej druga osoba z zespołu.

Uwagi

Aby uzyskać dokładniejszy wynik, należy unikać wybierania promieni pierścieni Newtona położonych blisko siebie.

Pomiary promieni pierścieni wykonaj następująco: ustaw wybrany punkt (odniesienia) na skali na wybranym ciemnym (ew. jasnym) pierścieniu po lewej stronie i wykonaj pomiary położenia ciemnych (jasnych) prążków, przesuwając stolik mikroskopu zawsze w jedną stronę, z lewa na prawo, ku wewnętrznym pierścieniom – do centralnego obszaru – a następnie przez coraz to większe numery pierścieni, aż dotrzesz do pierścienia o tym samym numerze, od którego zacząłeś, lecz tym razem po przeciwnej stronie centralnego obszaru. Postaraj się zmierzyć możliwie największą liczbę pierścieni. Zadbaj o to, by przesuwając stolik mikroskopu w trakcie pomiaru, przejść przez środek centralnego obszaru wzoru interferencyjnego.

3. Po pomiarach ostrożnie zdjąć soczewkę oraz szkiełko przedmiotowe i włożyć do pudełeczek.

C. Ustawienia mikroskopu i soczewki

1. Przetrzyj ręcznikiem papierowym lub chusteczką soczewkę i płytkę. Połóż płytkę na stoliku mikroskopu a na płytce soczewkę płaską stroną do góry a następnie
   a) ustaw środek soczewki pod obiektywem mikroskopu, tak aby osie optyczne soczewki i obiektywu pokrywały się;
   b) wyreguluj wysokość tubusa mikroskopu nad soczewką, tak aby otrzymać ostry obraz pierścieni Newtona.

   Uwaga: Jeśli nie widać pierścieni należy sprawdzić położenie soczewki – p. a), ponownie ustawić w mikroskopie ostry obraz górnej powierzchni płytki równoległościennej (przy pomocy bocznego pokrętła).
2. Zadbaj o regularny kształt pierścieni. Gdy uznasz, że nie mają one kształtu okręgu, przetrzyj ponownie płytkę i soczewkę lub przesuń soczewkę w inne miejsce na płytce.
3. Upewnij się, że środek pierścieni jest jasny (ciemny). Gdy tak nie jest, przetrzyj zarówno płytkę jak i soczewkę lub przesuń soczewkę w inne miejsce na płytce.
4. Przesunąć układ na stoliku mikroskopu tak, aby centrum pierścieni (jasne pole) znajdowało się możliwie na środku pola widzenia okularu.

D. Cechowanie podziałki okularu mikrometrycznego.

1. Postępując bardzo ostrożnie, umieść na stoliku mikroskopu płytkę szklaną ze skalą 1 mm z działką elementarną 0,01 mm, tzw. skala mikrometryczna. Ustaw w mikroskopie ostry obraz górnej powierzchni płytki (przy pomocy bocznego pokrętła).
2. Za pomocą pokręteł przesunąć stolik mikroskopu tak, aby podziałka skali mikrometrycznej pokrywała się z podziałką okularu. Skalę w okularze obracamy poprzez obrót okularem do takiego ustawienia aby obie skale nakładały się na siebie.
   a) Odczytać wskazania podziałki okularu dla maksymalnego zakresu skali mikrometrycznej. Odczyty dokonać poprzez ustawienie początku skal na wartości: 0-0, 0-100, 100-0, 100-100, gdzie 0 – początek skali, 100 – koniec skali dla skali mikrometrycznej jak i skali okularowej.
   b) Odczytać wskazania podziałki okularu dla połowy maksymalnego zakresu skali mikrometrycznej wg podobnego schematu jak w p. b).
   Pomiary powtórzyć – najlepiej niezależnie (druga osoba z zespołu).
3. Po pomiarach ostrożnie zdjąć szkiełko ze skalą mikrometryczną i włożyć do pojemnika.

E. Pomiar promienia krzywizny soczewki przy użyciu sferometru

1. Zapoznać się z działaniem sferometru pierścieniowego. Zanotować jakie jest przesunięcie trzpienia sferometru dla pełnego obrotu wskazówki czujnika.
2. Zmierzyć średnicę sferometru. Pomiar wykonać suwmiarką mierząc wewnętrzną średnicę na brzegu pierścienia co najmniej 6x (dla tego brzegu, który dotyka do powierzchni).
3. Ustawić sferometr na szklanej płytce i określić położenie punktu odniesienia.

   Uwaga: Wartość h strzałki czaszy kulistej soczewki jest różnicą wskazań czujnika na płytce płaskorównoległej i na mierzonej powierzchni. Dla sferometru pierścieniowego jest możliwość regulacji położenia czujnika względem pierścienia i ustawienia na położenie „0”, w tym celu poluźnić śrubę regulacyjną, w wyniku czego wskazówka ustawi się w położeniu "0", dokręcić śrubę regulacyjną, obracając tarczą z podziałką ustawić „0”.
4. Pomiar promienia krzywizny soczewki – ustawić sferometr na badanej soczewce i odczytać wartość strzałki h. Czynności te powtórzyć co najmniej 6x, notując wyniki.

F. Czynności końcowe i porządkowe.

1. Ustawić pierścienie Newtona – wykonaj czynności z p. **C**. 1-4.
2. Wyłączyć lampę sodową. Zestawić przyrządy na przynależnym im miejscu.

4. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

A. Cechowanie podziałki okularu mikrometrycznego.

1) Wyznaczyć stałą cechowania κ jako średnią arytmetyczną wartości cząstkowych κ_i

$$\kappa_i = (m_i / n_i) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

gdzie: m_i – liczba działek na skali mikrometrycznej, została przyjęta 100 i 50;
n_i – liczba działek na skali okularu.

2) Obliczyć wartość jednostki skali okularu i niepewność standardową stałej cechowania.

B. Wyznaczanie promieni pierścieni interferencyjnych i wartości promienia *r*.

1) Obliczyć promienie kolejnych pierścieni wg wzoru:

$$r_k = \frac{|x_{-,k}| + |x_{+,k}|}{2} \cdot \kappa.$$

Obliczyć niepewność pomiaru* $u(a_i)$.

Przyjmij graniczną niepewność pomiaru $x_{-,k}$ i $x_{+,k}$ równą rozdzielczości skali.

2) Wyznaczyć promień soczewki R na podstawie wzoru (5) lub mu odpowiadającego ze względu na wybrane do pomiaru prążki – jasne czy ciemne. Wybrać kilkawartości k_1 i k_2.
Przyjąć λ = (588,99 nm + 589,59 nm)/2.
Do wyznaczenia wartości R należy wybierać pierścienie jak najbardziej oddalone od siebie.
Obliczyć wartość średnią i oszacować niepewność pomiaru $u(R)$.
3) Sporządzić wykres $r_{\min}^2(k) = (k - 1/2)\lambda R$ jeśli środkowy pierścień (krążek) jest jasny
lub $r_{\min}^2(k) = k\lambda R$ jeśli środkowy pierścień (krążek) jest ciemny.
Z wykresu, z nachylenia prostej, wyznacz wartość R. Oszacować niepewność pomiaru.
Na wykresie zaznaczyć odcinki niepewności (o ile będą wystarczająco widoczne).
Wskazane jest skorzystanie z arkusza kalkulacyjnego i metody regresji liniowej – Dodatek, p. 3.

C. Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki przy użyciu sferometru

1. Określić niepewności graniczne pomiarów bezpośrednich.
2. Obliczyć wartości średnie i niepewność pomiaru* $u(r)$.

D. Zestawienie wyników i niepewności pomiarowych.

Porównać otrzymane różnymi metodami wartości *R*, skorzystać z kryterium zgodności*.

5. Dokonać dyskusji wyników, zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia.

LITERATURA

1. Pawlak B., Gąsowski R., Kozłowski J.: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki dla przyrodników*. Szczecin, Wyd. Naukowe US, 2005.
2. Podręczniki akademickie, np. Sz. Szczenowski, *Fizyka doświadczalna*, t. IV, *Optyka*. Warszawa, PWN, 1983.
3. Szydłowski H.: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Warszawa, PWN, 1999.
4. Magiera A. (red.): I Pracownia fizyczna. p. 4.13: *Pomiar długości fali świetlnej z wykorzystaniem pierścieni Newtona*. Wyd. IV, IF UJ 2014; www.1pf.if.uj.edu.pl/documents/5046939/5227638/skrypt.pdf

5. Wybrane instrukcje z Prac. Fizycznych: *Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki płasko-wypukłej metodą pierścieni Newtona*. WFiIS UŁ; http://kawe.wfis.uni.lodz.pl/IPF/Instrukcje/O-16.pdf *Interferencyjny pomiar krzywizny soczewki (pierścienie Newtona*). Wydz. Fizyki UW; http://pracownie1.fuw.edu.pl/techpom/pliki/ins052_n16.pdf
6. Woźniak A. W.: *Pomiar promieni krzywizny – sferometr pierścieniowy, czujnikowy*; w: *Pomiary optyczne 1*: Wykład 7 – *Metody pomiarów elementów układów optycznych*. http://www.if.pwr.edu.pl/~wozniak/pomiary_optyczne_1_pliki/wyklad_7.pdf

*Dodatek

1. Niepewność pomiaru

Niepewność całkowita wielkości x mierzonej bezpośrednio:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{(\Delta_\mathrm{d} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_\mathrm{t} x)^2}{3} + u_\mathrm{e}^2(x)} \tag{A}$$

gdzie pierwszy składnik pod pierwiastkiem – niepewność standardowa średniej; $\Delta_\mathrm{d}x$ – niepewność wzorcowania (niepewność wynikająca z dokładności przyrządu); $\Delta_\mathrm{t}x$ – niepewności wyników zaczerpniętych z literatury, tablic lub kalkulatora; $u_\mathrm{e}(x)$ – niepewność standardowa eksperymentatora.

Złożoną niepewność standardową $u(y)$ – niepewność dla funkcji kilku zmiennych $y = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ oblicza się korzystając z **prawa przenoszenia niepewności** pomiaru.

Obliczanie niepewności $u(y)$ można dokonać bez odwoływania się do rachunku różniczkowego korzystając z metody elementarnej, wzór numeryczny w *Przewodniku GUM* [1] poprzez obliczanie *udziałów niepewności*

$$u_i(y) = \frac{1}{2}\left| f(x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_i - u(x_i), \ldots, x_N)\right| \tag{B}$$

$u_i(y)$ – zmiana wartości funkcji f spowodowana zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$.

$u(y)$ obliczamy jako sumę geometryczną udziałów $u_i(y)$:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)}\,. \tag{C}$$

W przypadku gdy zależność funkcyjna dla f ma postać jednomianu: $y = c\,x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, c – stała, wówczas wygodnie jest korzystać z prawa propagacji niepewności względnych[2]

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\, u_\mathrm{r}(x_i)\right]^2}\ , \tag{D}$$

gdzie $u_\mathrm{r}(x_i) \equiv u(x_i)/|x_i|$ – względna niepewność pomiaru wielkości x_i.

2. Porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z innym wynikiem, np. tablicowym x^T, korzystamy z przedziałowego ***kryterium zgodności wyników pomiarów***, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - x^\mathrm{T}\right| \le u(\bar{x}) + u(x^\mathrm{T})\,. \tag{E}$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną U*, gdzie $U(x) = k\,u(x)$ a współczynnik k, w naszym przypadku należy przyjąć 2. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*) – zdefiniowana przez „wielkość określającą przedział wokół wyniku pomiaru, taki że można oczekiwać, iż obejmie on dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przyporządkować wielkości mierzonej."

[1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1993, 1995; (dokument wydany w imieniu BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OML). Fundamentalny dokument zbiorowego autora – zespołu międzynarodowych organizacji naukowo-technicznych – dla ustanowienia procedury wyrażania niepewności pomiaru, jest wydany przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) Publikacja jest udostępniona online: http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

[2] Niepewność względna w *Przewodniku GUM* nie ma oddzielnego oznaczenia. W sytuacjach nie powodujących nieporozumień można stosować zapis z indeksem dolnym „r" tj. $u_\mathrm{r}(y) \equiv u(y)/y$.

Obie niepewności są powiązane zależnością $U = ku$, gdzie k – współczynnik rozszerzenia. Współczynnik rozszerzenia k zależny jest od liczby pomiarów oraz poziomu ufności (określany jest często mianem *współczynnika Studenta-Fishera* $t_{n,a}$), w większości przypadków przyjmujemy $k = 2$

3. Regresja liniowa – klasyczna (metoda najmniejszych kwadratów)[3]

Jeżeli pomiędzy dwiema wielkościami fizycznymi występuje zależność liniowa to regresja liniowa jest prostą metodą wyznaczenia parametrów najlepiej dopasowanej prostej. Parametry prostej określonej równaniem $\boldsymbol{y = mx + b}$ wyznaczamy przy użyciu ogólnie dostępnych (dość złożonych) wzorów. Znając współczynniki m i b regresji liniowej oraz współczynnik korelacji (Pearsona) r można, korzystając z poniższych wzorów, obliczyć niepewności pomiaru (odchylenia standardowe) typu A (statystyczne)

$$u_{\mathrm{A}}(m) = |m|\sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}}, \qquad u_{\mathrm{A}}(b) = u_{\mathrm{A}}(m)\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)/n} \cdot \tag{F}$$

Wartości współczynników charakteryzujących prostą dla regresji liniowej szybko otrzymamy korzystając z funkcji wbudowanych w arkuszu kalkulacyjnym.

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona r – bezwymiarowy wskaźnik z przedziału [–1, 1] określający stopień liniowej zależności dwóch zestawów danych. Składnia w Excelu: =PEARSON(tablica1;tablica2).

Współczynniki regresji liniowej, składnia w Excelu:

m: =NACHYLENIE(*znane_y*;*znane_x*); *b*: =ODCIĘTA(*znane_y*;*znane_x*)

Uwaga: zwrócić uwagę, że na pierwszym miejscu jest „*y*” a na drugim „*x*”.

Wartości: m i b, $u_{\mathrm{A}}(m)$ i $u_{\mathrm{A}}(b)$ oraz r^2 i $u(r)$ otrzymamy korzystając z bardziej wszechstronnej funkcji tablicowej REGLINP, która zwraca tablicę wartości. Składnia: =REGLINP(*znane_y*;*znane_x*;*stała*;*statystyka*).

Stała – argument opcjonalny; domyślna wartość PRAWDA oznacza normalne liczenie wartości wpółczynnnika b; wartość FAŁSZ wymusza , to stała $b = 0$ (wartość m jest dopasowana do danych tak, aby spełnić równanie $y = mx$), tak powinno się pojawić w naszym przypadku.

Statystyka – argument opcjonalny. Jeżeli dla wyświetlenia wartości funkcji oznaczymy obszar „2 kolumny na 2 wiersze (3 wiersze)” i wartością jest:

– PRAWDA, to funkcja w kolejnych wierszach zwraca kolejno: m i b, $u_{\mathrm{A}}(m)$ i $u_{\mathrm{A}}(b)$ – przy zaznaczeniu obszaru z 2 wierszami (oraz r^2 i $u(r)$ przy zaznaczeniu obszaru z 3 wierszami).

– FAŁSZ lub argument został pominięty, to funkcja zwraca jedynie wartości współczynników m i b.

Aby użyć funkcję REGLINP trzeba: (i) zaznaczyć obszar w którym ma się znaleźć wynik; (ii) wpisać nazwę funkcji; (iii) zatwierdzić jej wprowadzanie kombinacją klawiszy *Ctrl+Shift+Enter*.

Na temat wszystkich statystyk, generowanych przez funkcję REGLINP można przeczytać w Pomocy.

Uwaga. W arkuszu kalkulacyjnym jest wykorzystana tzw. normalna metoda najmniejszych kwadratów, pojawia się pytanie na ile ta metoda, w porównaniu do prostej regresji ortogonalnej z rys. odręcznego, jest zgodna.

[3] np. P. Bilski, M. Dobies, A. Kozak, M. Makrocka-Rydzyk, *Materiały do ćwiczeń ze wstępu do pracowni fizycznej. Normy ISO i matematyka w laboratorium*. Wyd. Naukowe UAM; 2014; A. Zięba: *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*. PWN. Warszawa, 2014.