Zad. E 11	I PRACOWNIA FIZYCZNA Instytut Fizyki US
Temat:	**Wyznaczanie indukcji własnej i pojemności w obwodach prądu przemiennego**

Cel: Poznanie zjawisk w obwodach prądu przemiennego w układzie połączeń szeregowych RL i RC, wyznaczenie indukcji własnej cewki – samej i z rdzeniem, pojemności kondensatora, zbadanie zależności reaktancji od częstości. Nauczenie studenta samodzielnego posługiwania się aparaturą pomiarową oraz wykształcenie umiejętności analizy i interpretacji wyników pomiarów.

Przyrządy: cewka, rdzeń do cewki, kondensator, generator m. cz. G501 (niepewność względna 5%), mierniki elektryczne – Meratronik V640, UNI-T M 890 F (do pomiaru rezystancji cewki), przewody do połączeń.

1. ZAGADNIENIA

1. Znajomość zagadnień BHP w zakresie bezpiecznej pracy na stanowisku laboratoryjnym w pracy z prądem elektrycznym. Prąd rażeniowy.
2. Łączenie mierników i odbiorników prądu elektrycznego.
3. Prąd elektryczny przemienny w obwodach RC, RL, wielkości je opisujące, jednostki. Napięcie i natężenie skuteczne, zawada.
4. Obwód RLC, rezonans elektryczny.

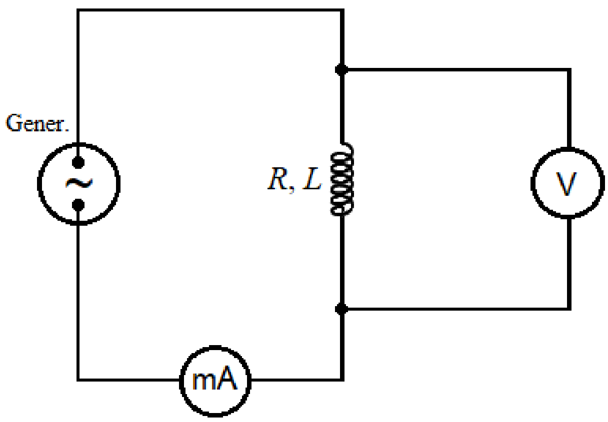
2. OPIS ZAGADNIENIA

Na podstawie literatury zapoznać się z opisami.

3. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

A. Wyznaczanie wartości indukcji własnej cewki

1. Wyznaczyć opór cewki R za pomocą omomierza cyfrowego.
2. Połączyć układ według schematu – Rys. 1.

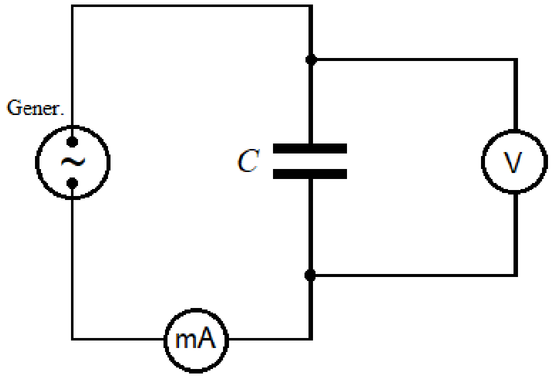


Rys. 1. Schemat układu pomiarowego z cewką.

3. Dla pięciu wybranych wartości częstotliwości f wyznaczyć napięcie U_L i natężenie I_L skuteczne w obwodzie.
4. Analogiczne pomiary wykonać dla cewki z rdzeniem.

B. Wyznaczanie pojemości kondensatora

1. Połączyć układ według schematu – Rys. 2.
2. Dla pięciu wybranych wartości częstotliwości f wyznaczyć napięcie U_C i natężenie I_C skuteczne w obwodzie.



Rys. 2. Schemat układu pomiarowego z kondensatorem.

4. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

Wyznaczenie wartości pomiarowych. Obliczenie niepewności pomiaru.

A. Cewka

1. Wyznaczyć niepewność graniczną pojedynczego pomiaru mierzonych wielkości: oporu rzeczywistego cewki R, natężenia I_L i napięcia U_L skutecznego na podstawie klasy przyrządu.
2. Obliczyć zawadę Z obwodu ($Z = U_L/I_L$). Z zależności $Z^2 = R^2 + R_L^2$ obliczyć współczynnik samoindukcji L, gdzie $R_L = \omega L$ ($\omega = 2\pi f$).
3. Obliczyć niepewność pomiaru zawady – $u(Z)$ oraz współczynnika samoindukcji – $u(L)$. (Uwaga: Do obliczeń skorzystać z ogólnych wzorów z pochodnymi lub ze wzoru numerycznego – patrz przypis na końcu).
4. Wykonać wykres zależności $R_L = f(\omega)$. Zaznaczyć odcinki niepewności pomiaru. Z wykresu wyznaczyć współczynnik kierunkowy otrzymanej prostej (metodą regresji liniowej) i porównać z wartością współczynnika samoindukcji otrzymanego z obliczeń rachunkowych.

B. Kondensator

1. Wyznaczyć niepewność graniczną pojedynczego pomiaru mierzonych wielkości: natężenia I_C i napięcia skutecznego U_C na podstawie klasy przyrządu.
2. Obliczyć zawadę Z obwodu ($Z = U_C/I_C$). Z zależności $Z = R_C = 1/\omega C$ obliczyć pojemność C.
3. Obliczyć niepewność pomiaru zawady – $u(Z)$ oraz pojemności – $u(C)$ dla użytego w doświadczeniu kondensatora.
4. Wykonać wykres zależności $R_C = f(1/\omega)$. Zaznaczyć odcinki niepewności pomiaru. Z wykresu wyznaczyć współczynnik kierunkowy otrzymanej prostej (metodą regresji liniowej.

C. Zestawić wyniki i niepewności pomiaru.

5. Dokonać dyskusji wyników, zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia.

1. Porównać odpowiadające sobie otrzymane wartości z p. A i z p. B (na podstawie wykresu i z obliczeń rachunkowych).
2. Przeanalizować źródła ewentualnych rozbieżności.
3. Zapisać wnioski i uwagi dotyczące przebiegu doświadczenia i realizacji doświadczenia.

6. LITERATURA

1. B. Pawlak, R. Gąsowski, J. Kozłowski: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki dla przyrodników*. Szczecin, Wyd. Naukowe US, 2005.
2. Dryński T.: *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*. Wyd. VI (lub następne), PWN, Warszawa 1977, p. 81.
3. Podręczniki akademickie.

*Dodatek

1. Dane z instrukcji dla mierników [5]:

Miernik uniwersalny M 890F – http://dydfiz.univ.szczecin.pl/pdf/pdf_248.pdf, pomiar:
napięcie DC – zakresy 200 mV / 2 V / 20 V / 200 V: dokładność ±(0,5% wartości mierzonej +1 dla ostatniej cyfry znaczącej); natężenie prądu stałego DC: 2 mA / 20 mA ±(0,8%+1); 200 mA ±(1,2%+1);
pojemność: 2000 pF / 20 nF / 200 nF / 2 μF/ 20 μF – dokładność ±(2,5%+3);
rezystancja – zakresy 4 kΩ / 40 kΩ / 400 kΩ / 200 mV / 2 V / 20 V / 200 V: dokładność ±(0,.
rezystancja – zakresy: 200 Ω – ±(0,8%+3); 2 k Ω / 20 k Ω / 200k Ω / 2 MΩ – ±(0,8%+1); 20 MΩ – ±(1%+2).

Multimetr **elektroniczny Typ V640**: Dokładność pomiaru: ±1,5% wartości zakresu.

Przykład. Jeśli wskazanie na zakresie 200 mA wynosi 178,9 to dla 1,2 % mamy 2,15. Dla 1 cyfry na ost. miejscu znaczącym daje 0,1. Zatem niepewność graniczna pojedynczego pomiaru wynosi: 2,3 (z zaokraglenia liczby 2,25).

2. Niepewność pomiaru

Niepewność całkowita wielkości x mierzonej bezpośrednio:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{(\Delta_\mathrm{d} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_\mathrm{t} x)^2}{3} + u_\mathrm{e}^2(x)} \tag{A}$$

gdzie pierwszy składnik pod pierwiastkiem – niepewność standardowa średniej; $\Delta_\mathrm{d}x$ – niepewność wzorcowania (niepewność wynikająca z dokładności przyrządu); $\Delta_\mathrm{t}x$ – niepewności wyników zaczerpniętych z literatury, tablic lub kalkulatora; $u_\mathrm{e}(x)$ – niepewność standardowa eksperymentatora.

Złożoną niepewność standardową *u*(*y*) – niepewność dla funkcji kilku zmiennych $y = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ oblicza się korzystając z **prawa przenoszenia niepewności** pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[c_i\, u(x_i)\right]^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)}\,,$$

gdzie N – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio, c_i – współczynnik wrażliwości,
$u_i(y) \equiv c_i\, u(x_i)$ – udziały niepewności.

Obliczanie niepewności $u(y)$ można dokonać bez odwoływania się do rachunku różniczkowego korzystając z metody elementarnej – wzoru numerycznego wskazanego w *Przewodniku GUM* [1] poprzez obliczanie *udziałów niepewności*

$$u_i(y) = \frac{1}{2}\left| f(x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_i - u(x_i), \ldots, x_N)\right| \tag{B}$$

$u_i(y)$ – zmiana wartości funkcji f spowodowana zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$.

$u(y)$ obliczamy jako sumę geometryczną udziałów $u_i(y)$:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)}\,. \tag{C}$$

W przypadku gdy zależność funkcyjna dla f ma postać jednomianu: $y = c\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, c – stała, wówczas wygodnie jest korzystać z prawa propagacji niepewności względnych[2]

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\, u_\mathrm{r}(x_i)\right]^2}\ , \tag{D}$$

gdzie $u_\mathrm{r}(x_i) \equiv u(x_i)/|x_i|$ – względna niepewność pomiaru wielkości x_i.

3. Porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z innym wynikiem, np. tablicowym x^T, korzystamy z przedziałowego ***kryterium zgodności wyników pomiarów***, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - x^\mathrm{T}\right| \le u(\bar{x}) + u(x^\mathrm{T})\,. \tag{E}$$

---

[1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1993, 1995; (dokument wydany w imieniu BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OML). Fundamentalny dokument zbiorowego autora – zespołu międzynarodowych organizacji naukowo-technicznych – dla ustanowienia procedury wyrażania niepewności pomiaru, jest wydany przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) Publikacja jest udostępniona online:
http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

[2] Niepewność względna w *Przewodniku GUM* nie ma oddzielnego oznaczenia. W sytuacjach nie powodujących nieporozumień można stosować zapis z indeksem dolnym „r” tj. $u_\mathrm{r}(y) \equiv u(y)/y$.

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną U*, gdzie $U(x) = ku(x)$ a współczynnik k, w naszym przypadku należy przyjąć 2. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*) – zdefiniowana przez „wielkość określającą przedział wokół wyniku pomiaru, taki że można oczekiwać, iż obejmie on dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przyporządkować wielkości mierzonej."

Obie niepewności są powiązane zależnością $U = ku$, gdzie k – współczynnik rozszerzenia. Współczynnik rozszerzenia k zależny jest od liczby pomiarów oraz poziomu ufności (określany jest często mianem *współczynnika Studenta-Fishera* $t_{n,\alpha}$), w większości przypadków przyjmujemy $k = 2$

4. Regresja liniowa – klasyczna (metoda najmniejszych kwadratów)[3]

Jeżeli pomiędzy dwiema wielkościami fizycznymi występuje zależność liniowa to regresja liniowa jest prostą metodą wyznaczenia parametrów najlepiej dopasowanej prostej. Parametry prostej określonej równaniem $\boldsymbol{y = mx + b}$ wyznaczamy przy użyciu ogólnie dostępnych (dość złożonych) wzorów. Znając współczynniki m i b regresji liniowej oraz współczynnik korelacji (Pearsona) r można, korzystając z poniższych wzorów, obliczyć niepewności pomiaru (odchylenia standardowe) typu A (statystyczne)

$$u_{\mathrm{A}}(m) = |m|\sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}}, \qquad u_{\mathrm{A}}(b) = u_{\mathrm{A}}(m)\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)/n}\,. \tag{F}$$

Wartości współczynników charakteryzujących prostą dla regresji liniowej szybko otrzymamy korzystając z funkcji wbudowanych w arkuszu kalkulacyjnym.

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona r – bezwymiarowy wskaźnik z przedziału [–1, 1] określający stopień liniowej zależności dwóch zestawów danych. Składnia w Excelu: =PEARSON(tablica1;tablica2).

Współczynniki regresji liniowej, składnia w Excelu:

m: =NACHYLENIE(*znane_y*;*znane_x*); b: =ODCIĘTA(*znane_y*;*znane_x*)

Uwaga: zwrócić uwagę, że na pierwszym miejscu jest „*y*" a na drugim „*x*".

Wartości: m i b, $u_{\mathrm{A}}(m)$ i $u_{\mathrm{A}}(b)$ oraz r^2 i $u(r)$ otrzymamy korzystając z bardziej wszechstronnej funkcji tablicowej REGLINP, która zwraca tablicę wartości. Składnia: =REGLINP(*znane_y*;*znane_x*;*stała*;*statystyka*).

Stała – argument opcjonalny; domyślna wartość PRAWDA oznacza normalne liczenie wartości wpółczynnnika b; wartość FAŁSZ wymusza , to stała $b = 0$ (wartość m jest dopasowana do danych tak, aby spełnić równanie $y = mx$), tak powinno się pojawić w naszym przypadku.

Statystyka – argument opcjonalny. Jeżeli dla wyświetlenia wartości funkcji oznaczymy obszar „2 kolumny na 2 wiersze (3 wiersze)" i wartością jest:

– PRAWDA, to funkcja w kolejnych wierszach zwraca kolejno: m i b, $u_{\mathrm{A}}(m)$ i $u_{\mathrm{A}}(b)$ – przy zaznaczeniu obszaru z 2 wierszami (oraz r^2 i $u(r)$ przy zaznaczeniu obszaru z 3 wierszami).

– FAŁSZ lub argument został pominięty, to funkcja zwraca jedynie wartości współczynników m i b.

Aby użyć funkcję REGLINP trzeba: (i) zaznaczyć obszar w którym ma się znaleźć wynik; (ii) wpisać nazwę funkcji; (iii) zatwierdzić jej wprowadzanie kombinacją klawiszy *Ctrl*+*Shift*+*Enter*.

Na temat wszystkich statystyk, generowanych przez funkcję REGLINP można przeczytać w Pomocy.

Uwaga. W arkuszu kalkulacyjnym jest wykorzystana tzw. normalna metoda najmniejszych kwadratów, pojawia się pytanie na ile ta metoda, w porównaniu do prostej regresji ortogonalnej z rys., jest uzasadniona.

[3] np. P. Bilski, M. Dobies, A. Kozak, M. Makrocka-Rydzyk, *Materiały do ćwiczeń ze wstępu do pracowni fizycznej. Normy ISO i matematyka w laboratorium.* Wyd. Naukowe UAM; 2014; A. Zięba: *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*. PWN. Warszawa, 2014.