Zad. M 06A	I PRACOWNIA FIZYCZNA Instytut Fizyki US
Temat:	**Wahadło matematyczne – wyznaczanie wartości przyśpieszenia ziemskiego**

Cel: zapoznanie się z ruchem drgającym i analizą takiego ruchu na przykładzie wahadła matemtycznego. Wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego. Kształcenie samodzielności w posługiwaniu się aparaturą pomiarową umiejętności planowania eksperymentu, analizy i interpretacji wyników pomiarów.

Przyrządy: wahadło – kula umocowana do nitki i zawieszona na haku, taśma miernicza, suwmiarka, stoper o rozdzielczości 0,01 s, (licznik impulsów – opcja).

1. ZAGADNIENIA

1. Oscylator harmoniczny. Znajomość zagadnień dotyczących ruchu harmonicznego prostego.
2. Wahadło matematyczne. Siły działające na wahadło, rozkład sił działających na kulkę. Okres drgań. Izochronizm drgań.
3. Przybliżenie dla małych drgań. Długość zredukowana. Przybliżenia prowadzące od wahadła rzeczywistego – kulki zawieszonej na nitce do wahadła prostego. Wpływ oporów na ruch whadła.

2. OPIS ZAGADNIENIA

A. Wprowadzenie

Przyjmijmy, że kulka o masie m_k i promieniu r jest zawieszona na nitce o długości l i masie m_n, a nitka od góry jest zaczepiona np. zawieszona na haku. Jeśli kulkę odchylimy z położenia równowagi będzie wykonywać drgania wokół poziomej osi przechodzącej przez punkt mocowania nitki na haku. Jeśli wychylenie jest małe drgania są harmoniczne i jeśli pominiemy rozmiary kulki i masę nitki to kwadrat okresu T drgań jest równy

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L, \tag{1}$$

gdzie $L = l + r$ – długość wahadła, g – przyśpieszenie ziemskie.
Stąd

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}. \tag{2}$$

3. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

A. Metoda pomiarów.

Należy spełnić warunki założeń dla wzoru (2). Kąt wychylenia powinien być mały[1]. Pomiary sprowadzają się do wyznaczenia okresu wahadła, długości wahadła tj. długości nitki i średnicy kulki lub odległości punktu zaczepienia wahadła oraz kulki do podłoża. Ponieważ dokładność wyznaczenia g powinna być co najmniej z trzema cyframi znaczącymi więc należy zaplanować pomiary z wystarczającą dokładnością. Należy zwrócić uwagę, że we wzorze (2) T jest w kwadracie oraz, że pomiar ręczny czasu drgań jest mało dokładny ze względu na uwarunkowania eksperymentatora przy włączeniu i wyłączeniu stopera (niepewność eksperymentatora). W związku z tym okres wahań należy wyznaczać jako przedział czasu między dwoma kolejnymi przejściami wahadła w tę samą stronę nad znacznikiem znajdującym się pod wahadłem w położeniu równowagi. Należy unikać takich punktów odniesienia, które są bliskie momentom zwrotnym w ruchu wahadła, gdyż wyznaczany przy ich wykorzystaniu okres będzie mniej

[1] Wskazane aby dokonać przeliczeń dla kilku małych kątów aby mieć orientację jak duże są poprawki i jaka powinna być maksymalna amplituda whadła. Np. kąt 7° odpowiada w mierze łukowej 0,122 rad co w cm dla długości wahadła odpowiada długości łuku: 50 – 6,1; 100 – 12,2; 150 – 18,3; 200 – 24,4; 250 – 30,5.

dokładny (dlaczego?). Ponadto należy zmierzyć czas t kilku dla wielokrotności okresu – nT (jakiej – zaplanować).

Z (1) mamy, że zależność między T^2 a długością wahadła L jest liniowa. Należy zaplanować pomiary dla kilku różnych długości wahadła aby dokonać analizy graficznej.

Przygotuj tabelę pomiarową.

B. Wykonanie doświadczenia.

1. Ustal parametry wahadła:
   a) Wyznacz masę kulki i wahadła.
   b) Długość wahadła L.

Kula wahadła powinna znaleźć się kilka centymetrów nad podłogą. Zmierz kilkakrotnie długość wahadła $L = l + r$, gdzie l – długość nici, r – promień kulki i zanotuj dane.

c) Zawiesić wahadło. Pod znajdującym się w położeniu równowagi wahadłem, umieść na podłodze znacznik: metalowy pręt (będzie do dyspozycji) lub kartkę papieru z narysowaną wyraźną kreską. Wychyl wahadło z położenia równowagi, w kierunku prostopadłym do znacznika, o kąt (amplituda wychyleń) do zaplanowanej nie większej niż 7° i zwolnij je. Spróbuj różnych sposobów zwalniania wahadła i obserwuj je przez kilkanaście okresów. Zwróć uwagę, żeby wahadło nie krążyło po elipsie, kula wahadła nie „kiwała” się wokół własnego środka ciężkości, ani też nie obracała się wokół własnej osi. Wszystkie te efekty zmieniają okres drgań, który chcemy zmierzyć. Wykonaj kilka próbnych pomiarów. Przećwicz puszczanie kuli. „Dopracuj” się w miarę dobrego sposobu uruchamiania wahadła i wykonania pomiaru.

2. Zmierz kilka razy czas trwania n okresów drgań wg zaplanowanych wartości powtórzeń k.
3. Powtórz pomiary dla kilku innych długości wahadła (z zaplanowanych długości).

4. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

A. Wyznaczenie wartości pomiarowych.

1. Obliczyć potrzebne wartości średnie: L, T, T^2.
2. Przedstawić na wykresie zależność $T^2 = f(L)$ – na papierze milimetrowym (nanieść prostą) z zaznaczeniem odcinków niepewności o ile będzie to możliwe. Z wykresu wyznaczyć wartość g.
3. Stosując metodę regresji liniowej – komputerowo, wyznaczyć współczynniki nachylenia prostej.
4. Z wartości pomiarowych w tabeli wyznaczyć wartości średnie g dla każdej z długości i wartość średnią g dla wszystkich długości L.
5. Obliczyć wartość g dla Szczecina lub ją odszukać w danych tablicowych.

B. Niepewności pomiaru.

1. Oblicz niepewność pomiaru wielkości m, L, T, T^2.
2. Oblicz niepewność pomiaru wartości g wyznaczonych w p. A.2, 3, 4.
3. Oblicz udziały niepewności.

C. Zestawienie wyników i niepewności pomiaru z udziałami niepewności.

5. Dokonać dyskusji wyników, porównać wartości dla g otrzymane w p. A,

odnieść do wartość tablicowej – kryterium zgodności. Odnieść się do stosowanego modelu, zaplanowanych wartości powtórzeń pomiarów, zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia.

LITERATURA

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Podstawy fizyki*. Warszawa, PWN, 2007 lub inne wydanie.
2. Przykłady dla „*Wahadło matematycne* (…)” w: A. Zięba: *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*. PWN. Warszawa, 2014.
3. Przykład „*Wahadło matematycne* (…)” w: P. Bilski, M. Dobies, A. Kozak, M. Makrocka-Rydzyk: *Materiały do ćwiczeń ze wstępu do pracowni fizycznej. Normy ISO i matematyka w laboratorium*. Wydawnictwo Naukowe UAM; Poznań 2014.

4. Wikipedia, hasła: *wahadło, przyspieszenie ziemskie*.

* Często warunki przybliżenia nie są spełnione gdyż[2]
- kula nie jest punktem materialnym, dla kuli współczynnik poprawkowy na okres wynosi $1 + 0{,}4\,r^2/l^2$;
- nić nie jest nieważka, masa nici powoduje zmniejszenie okresu o czynnik $1 - (m_\mathrm{n}/m)/12$;
- kąt wychylenia nie jest do zaniedbania, amplituda wychyleń θ (w rad) wnosi poprawkę do okresu wahań T, której pierwsze przybliżenie wynosi $\theta^2/16$.

Znajomość czynników poprawkowych pozwala tak zaplanować pomiar, by można je było pominąć. Po uwzględnieniu tych poprawek, wzór (2) na przyspieszenie ziemskie, jest postaci:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{\left[T\left(1+\frac{1}{12}\theta^2\right)\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}\right)\left(1-\frac{1}{12}\frac{m_\mathrm{n}}{m}\right)\right]^2}, \qquad (3)$$

gdzie $m = m_\mathrm{k} + m_\mathrm{n}$ – masa wahadła.

Prawo przenoszenia niepewności względnych

Złożoną niepewność standardową $u_\mathrm{c}(y)$ wielkości liczonej pośrednio y oblicza się korzystając z prawa przenoszenia niepewności pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u_\mathrm{c}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[c_i u(x_i)\right]^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)}, \qquad (*)$$

gdzie N – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio, c_i – współczynnik wrażliwości, $u_i(y) \equiv c_i\, u(x_i)$ – udziały niepewności.

Złożoną niepewność standardową $u_\mathrm{c}(y)$ można obliczyć też z zalecanego przez *Przewodnik GUM* wzoru, zastępując w powyższym równaniu $(\partial f/\partial x_i)u(x_i)$ przez:

$$Z_i = \frac{1}{2}\left[f\left(x_1,\ldots,x_i + u(x_i),\ldots,x_N\right) - f\left(x_1,\ldots,x_i - u(x_i),\ldots,x_N\right)\right]. \qquad (*)$$

To znaczy, że wartość $u_i(y)$ ($\equiv (\partial f/\partial x_i)u(x_i)$ – udziały niepewności) wyznacza się obliczając zmianę spowodowaną zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$. Jako wartość $u_i(y)$ przyjmuje się $|Z_i|$ (jako wartość odpowiedniego współczynnika wrażliwości przyjmuje się $Z_i/u(x_i)$), wówczas $u_\mathrm{c}^2(y) = \sum_{i=1}^{N} Z_i^2$.

Wzór (*) wykorzystuje różnice (przyrosty) skończone w miejsce formuły z pochodną, co umożliwia jego stosowanie bez znajomości rachunku różniczkowego.

Niepewność całkowita wielkości x mierzonej bezpośrednio:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{(\Delta_\mathrm{d} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_\mathrm{t} x)^2}{3} + u_\mathrm{e}^2(x)}$$

gdzie pierwszy składnik pod pierwiastkiem – niepewność standardowa średniej, następnymi przyczynkami niepewności pomiaru są $\Delta_\mathrm{d} x$ – niepewność wzorcowania (niepewność wynikająca z dokładności przyrządu); $\Delta_\mathrm{t} x$ – niepewności wyników zaczerpniętych z literatury, tablic lub kalkulatora
$u_\mathrm{e}(x)$ – niepewność standardowa eksperymentatora.

Porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z wynikiem tablicowym x^T, korzystamy z przedziałowego ***kryterium zgodności wyników pomiarów***, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - x^\mathrm{T}\right| \le u(\bar{x}) + u(x^\mathrm{T}).$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną U*. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

[2] Oprócz wymienionych czynników do poprawek są i inne, np. wypór i opór powietrza.