Streszczenie

Głównym wynikiem pracy doktorskiej jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech $\hat{\varphi} = \phi_1^{e_1} \times ... \times \phi_t^{e_t}$ będzie t-modułem, gdzie $\phi_i, 1 \leq i \leq t$ są parami nieizogenicznymi modułami Drinfelda zdefiniowanymi nad $\mathcal{O}_K$ i załóżmy, że $\mathrm{End}(\phi_i) = A$. Niech $N_i \subset \phi_i(\mathcal{O}_K)$ będzie skończenie generowanym A-modułem grupy Mordella-Weila, $\Lambda \subset N = N_1^{e_1} \times ... \times N_t^{e_t}$ A-podmodułem. Załóżmy, że $d_i = rank(\phi_i) \geq e_i$ dla każdego $1 \leq i \leq t$. Niech $P \in N$ i załóżmy, że dla prawie wszystkich $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}(A)$ mamy $\mathrm{red}_{\mathcal{P}}(P) \in \mathrm{red}_{\mathcal{P}}(\Lambda)$. Wtedy $P \in \Lambda + N_{tor}$.*

Motywację dla rozpatrywania takiego problemu stanowiło analogiczne twierdzenie Banaszaka i Krasonia z pracy „On arithmetic in Mordell-Weil groups" z 2011 roku, której autorzy sformułowali homologiczny warunek dostateczny na zachodzenie liniowej zależności w grupach Mordella-Weila rozmaitości abelowych nad ciałami liczbowymi.

Strategia dowodu jest podobna jak w wyżej wymienionej pracy:

1. Udowodnienie twierdzenia o redukcji przy użyciu teorii Kummera i odpowiedniego twierdzenia o gęstości;
2. Przeprowadzenie rozumowania arytmetycznego w grupie Mordella-Weila korzystając z pewnych faktów z teorii półprostych modułów i algebr.

Występują jednak znaczne techniczne różnice wynikające ze specyfiki rozpatrywanej przez nas kategorii t-modułów. Dowód twierdzenia o redukcji był możliwy dzięki niedawno sformułowanej przez Pinka teorii Kummera w ujęciu Ribeta-Bashmakova dla modułów Drinfelda. Ma ono następującą postać:

Twierdzenie 2. *Niech L/K będzie skończonym rozszerzeniem ciał. Niech $x_{i,j} \in \phi_i(\mathcal{O}_L)$ dla $1 \leq j \leq s_i$ będą liniowo niezależnymi nad A elementami dla każdego $1 \leq i \leq t$. Istnieje nieskończony zbiór ideałów pierwszych $\mathcal{W}$ pierścienia $\mathcal{O}_L$ taki że $\mathrm{red}_{\mathcal{W}}(x_{i,j}) = 0$ w $\phi_i^{\mathcal{W}}(\mathcal{O}_L/\mathcal{W})$ dla każdego $1 \leq j \leq s_i$ i $1 \leq i \leq t$.*

W dalszej części rozprawy przedstawiony jest kontrprzykład do działania Twierdzenia 1, jeśli dla pewnego i, $1 \leq i \leq t$ nie jest spełniony warunek $rank(\phi_i) \geq e_i$. Kontrprzykład ten jest inspirowany pracą Jossena i Perucci, „A counterexample to the local-global principle of linear dependence for abelian varieties" z 2010 roku, ale metoda jego dowodu uogólnia metodę Jossena i Perucci.

W ostatniej części przedstawione są pewne wyniki dotyczące „dynamicznej zasady lokalno-globalnej" sformułowanej przez S. Barańczuka. S. Barańczuk podał aksjomaty dla obowiązywania dynamicznej zasady lokalno-globalnej przez pewne systemy algebraiczne. W pracy sprawdzone zostały te aksjomaty dla rozpatrywanych t-modułów Andersona.

Rozdział pierwszy zaczyna się od przeglądu problemów natury lokalno-globalnej, a w drugiej jego części zamieszczono wyniki rozprawy. W rozdziale drugim znajdują się potrzebne fakty z teorii algebr i modułów półprostych wraz z niektórymi dowodami. Trzeci rozdział to krótka prezentacja podstawowych faktów z teorii modułów Drinfelda i t-modułów. W czwartym rozdziale dowodzimy twierdzenia o redukcji. Rozdział piąty zawiera dowód Twierdzenia 1 oraz kontrprzykład. Szósty i ostatni rozdział poświęcony jest dynamicznej zasadzie lokalno-globalnej.